



# Analyse et simulation de la déformation de films polymères de décoration au cours de leur mise en forme

Daniel Ahmad

## ► To cite this version:

Daniel Ahmad. Analyse et simulation de la déformation de films polymères de décoration au cours de leur mise en forme. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. INSA de Lyon, 2013. Français. NNT : 2013ISAL0122 . tel-01153230

**HAL Id: tel-01153230**

**<https://theses.hal.science/tel-01153230>**

Submitted on 19 May 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre  
Année 2013

Thèse

# **Analyse et simulation de la déformation de films polymères de décoration au cours de leur mise en forme**

## **Présentée devant**

L'institut national des sciences appliquées de Lyon

## **Pour obtenir**

Le grade de docteur

## **Formation doctorale**

Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique (MEGA)

Spécialité : Mécanique, génie mécanique, génie civil

## **Par**

Daniel Ahmad

Prévu le 20 Novembre 2013 devant la Commission d'examen

## **Jury**

---

F. Schmidt	Professeur (Mines Albi)	Rapporteur
A. Tcharkhtchi	Professeur (ENSAM Paris)	Rapporteur
P. Boisse	Professeur (INSA Lyon)	Directeur
F. Dell'Isola	Professeur (Università di Roma, La Sapienza)	Examineur
E. Genthon	Responsable BE plasturgie (Groupe SEB)	Examineur
N. Hamila	Maître de conférences (INSA Lyon)	Co Directeur
A. Maazouz	Professeur (INSA Lyon)	Examineur

Laboratoire de recherche : Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS) - UMR5259

**INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales - Quinquennal 2011-2015**

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<u>CHIMIE DE LYON</u> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a>  Insa : R. GOURDON	<b>M. Jean Marc LANCELIN</b> Université de Lyon – Collège Doctoral Bât ESCPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 13 95 <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a>  Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN eea@ec-lyon.fr	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 <a href="mailto:Gerard.scorletti@ec-lyon.fr">Gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a>  Insa : H. CHARLES	<b>Mme Gudrun BORNETTE</b> CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 04.72.43.12.94 <a href="mailto:e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr">e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</u> <a href="http://ww2.ibcp.fr/ediss">http://ww2.ibcp.fr/ediss</a>  Sec : Safia AIT CHALAL Insa : M. LAGARDE	<b>M. Didier REVEL</b> Hôpital Louis Pradel Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69677 BRON Tél : 04.72.68 49 09 Fax : 04 72 35 49 16 <a href="mailto:Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr">Didier.revel@creatis.uni-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<u>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</u> <a href="http://infomaths.univ-lyon1.fr">http://infomaths.univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Johannes KELLENDONK</b> Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43.19.05 Fax 04 72 43 13 10 <a href="mailto:infomaths@bat710.univ-lyon1.fr">infomaths@bat710.univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<u>MATERIAUX DE LYON</u>	<b>M. Jean-Yves BUFFIERE</b> Secrétaire : Mériem LABOUNE  INSA de Lyon École Doctorale Matériaux Mérim LABOUNE Bâtiment Antoine de Saint-Exupéry 25bis Avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Tel : 04 72 43 71 70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:ed.materiaux@insa-lyon.fr">ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE (ED n°162)</u>	<b>M. Philippe BOISSE</b> Secrétaire : Mériem LABOUNE  Adresse : INSA de Lyon École Doctorale MEGA Mérim LABOUNE Bâtiment Antoine de Saint-Exupéry 25bis Avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Tel : 04 72 43 71 70 Fax : 04 72 43 72 37 <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a> Site web : <a href="http://www.ed-mega.com">http://www.ed-mega.com</a>
<b>ScSo</b>	<u>ScSo*</u>  <b>M. OBADIA Lionel</b>  Sec : Viviane POLSINELLI Insa : J.Y. TOUSSAINT	<b>M. OBADIA Lionel</b> Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 <a href="mailto:Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr">Lionel.Obadia@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

# Table des matières

<b>LISTE DES ILLUSTRATIONS .....</b>	<b>7</b>
<b>TABLEAUX .....</b>	<b>9</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>11</b>
<b>CHAPITRE 1 PRESENTATION DES POLYMERES ET LEUR MISE EN ŒUVRE .....</b>	<b>15</b>
PRESENTATION GENERALE DES MATERIAUX POLYMERES .....	16
1.1 POLYMERES AMORPHES .....	17
1.1.1 Structure locale d'un polymère amorphe.....	17
1.1.2 Le phénomène de transition vitreuse / Influence sur les propriétés mécaniques .....	18
1.2 POLYMERES SEMI-CRISTALLINS .....	19
1.3 LA MISE EN FORME DES FILMS POLYMERES : TECHNIQUES DE DECORATION .....	20
1.3.1 In-Mould-Labeling (IML) .....	21
1.3.2 In-Mould-Decoration (IMD).....	22
1.3.3 Tampographie.....	22
1.3.4 Le surmoulage (Insert Molding).....	22
1.3.5 Le thermoformage.....	24
CONCLUSION DU CHAPITRE 1 .....	27
<b>CHAPITRE 2 DIFFERENTES APPROCHES POUR LA SIMULATION DE LA MISE EN FORME DES FILMS POLYMERES .....</b>	<b>29</b>
2.1 ELEMENTS DE LA CINEMATIQUE DES GRANDES TRANSFORMATIONS .....	30
2.1.1 Tenseur gradient de la transformation .....	30
2.1.2 Mesures des déformations .....	33
2.1.3 Vitesses de déformation .....	34
2.2 DESCRIPTION DES EFFORTS INTERNES .....	35
2.3 DUALITE CONTRAINTES – DEFORMATIONS .....	36
2.4 CARACTERISATION MECANIQUE DES POLYMERES .....	37
2.4.1 Rappels sur la rhéologie des polymères .....	37
2.4.2 Le principe de superposition de Boltzmann.....	38
2.5 MODELISATION DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POLYMERES .....	40
2.5.1 Lois de comportement viscoélastique .....	40
2.5.2 Lois de comportement hyperélastique .....	44
2.5.3 Lois de comportement visco-hyperélastiques .....	46



2.5.4 Lois de comportement viscoplastiques.....	47
2.5.5 Modélisation de la thermodépendance des lois de viscosité.....	48
CONCLUSION DU CHAPITRE 2 .....	48
<b>CHAPITRE 3 SIMULATION DE LA MISE EN FORME DES FILMS DE POLYMERES AMORPHES</b>	<b>49</b>
3.1 CHOIX D'UNE LOI DE COMPORTEMENT .....	51
3.2 FORMULATION D'UNE LOI DE COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE NON – ISOTHERME .....	51
3.2.1 Formulation de la loi viscoélastique isotherme de K-BKZ :.....	52
3.2.2 Loi viscoélastique de K-BKZ modifiée :.....	54
3.2.3 Modélisation de la thermodépendance (lois de viscosité):.....	54
3.3 IMPLEMENTATION DES LOIS DE COMPORTEMENT DANS LE CODE PLAST .....	56
3.3.1 Schémas d'intégration temporelle.....	57
3.3.2 Discrétisation élément fini et modélisation des efforts .....	60
3.3.3 Implémentation et discrétisation de la loi de comportement viscoélastique dans Plast	62
3.4 IDENTIFICATION DES PARAMETRES CONSTITUTIFS DE LA LOI DE COMPORTEMENT .....	67
3.4.1 Caractérisation mécanique à température ambiante.....	68
3.4.2 Caractérisation mécanique en Analyse mécanique dynamique (DMA).....	69
3.4.3 Caractérisation thermique .....	70
3.4.4 Caractérisation rhéologique et identification des paramètres de la loi de viscosité.	71
3.5 VALIDATION DE LA LOI DE COMPORTEMENT.....	74
3.5.1 Test de cisaillement simple.....	75
3.5.2 Test de traction.....	76
3.5.3 Test en cisaillement oscillant .....	78
3.5.4 Test de relaxation .....	79
CONCLUSION DU CHAPITRE 3 .....	81
<b>CHAPITRE 4 SIMULATION NUMERIQUE DU CHAUFFAGE INFRAROUGE</b> .....	<b>83</b>
4.1 PRINCIPE DU CHAUFFAGE PAR RAYONNEMENT INFRAROUGE .....	85
4.2 NATURE DES TRANSFERTS THERMIQUES LORS DU PROCEDE .....	88
4.3 MODELISATION DES DIFFERENTS TYPES D'ECHANGES THERMIQUES .....	90
4.3.1 Modélisation des échanges conductifs au sein du polymère.....	90
4.3.2 Modélisation des échanges radiatifs entre surfaces (moule↔film↔ environnement).. .....	92
4.3.3 Modélisation du chauffage radiatif par les lampes infrarouges.....	94
4.3.4 Modélisation des échanges convectifs.....	95

4.4 APPLICATION : SIMULATION DU CHAUFFAGE IR DU PROTOTYPE DU CETIM .....	97
4.4.1 Configuration et dispositif expérimental .....	97
4.4.2 Relevés de températures .....	99
4.4.3 Validation avec des mesures expérimentales.....	100
CONCLUSION DU CHAPITRE 4.....	105
 <b>CHAPITRE 5   EXEMPLES DE SIMULATIONS DE MISE EN FORME DE FILMS POLYMERES PAR                   THERMOFORMAGE .....</b>	 <b>107</b>
5.1 DEMONSTRATEUR DU CETIM-CERMAT .....	109
5.1.1 Configuration adoptée pour la simulation.....	109
5.1.2 Résultats de simulation et validation.....	110
5.2 DEMONSTRATEUR DU PEP .....	116
5.2.1 Descriptif du prototype et dispositif .....	116
5.2.2 Configuration adoptée pour la simulation.....	117
5.2.3 Résultats de simulation .....	118
 <b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	 <b>123</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>125</b>



# Liste des illustrations

Figure 1-1. Schématisation d'une organisation macromoléculaire cristalline (encadrée en vert) et amorphe (encadrée en rouge) [ZIN10].	17
Figure 1-2. Représentation de la structure d'un polymère amorphe simulée par ordinateur [SUT94].	18
Figure 1-3. Variation schématique du module de cisaillement en fonction de la température pour un polymère amorphe [KAU99].	19
Figure 1-4. Schéma du procédé d'IML (In Mould Labeling).	21
Figure 1-5. Schéma du procédé d'IML (In Mould Labeling).	22
Figure 1-6. Schématisation de la technique de tampographie.	22
Figure 1-7. Schématisation du procédé de surmoulage.	23
Figure 1-8. Principe du thermoformage : Thermoformage négatif.	24
Figure 1-9. Plage de thermoformage pour différents types de polymères [JAM98].	25
Figure 2-1. Définition tenseur gradient de la transformation – Figure extraite de [MOE11].	31
Figure 2-2. Représentation de la décomposition polaire du gradient de la transformation.	33
Figure 2-3. Définition des efforts internes.	35
Figure 2-4. Sollicitation quelconque considérée comme (a) une succession d'échelons $\Delta_y$ imposés par pas de temps, (b) réponse correspondant à (a).	39
Figure 2-5. Élément de Maxwell linéaire.	41
Figure 2-6. Modèle de Zener; 2 composantes à la déformation totale.	41
Figure 2-7. Modèle de Maxwell généralisé.	42
Figure 2-8. Modélisation membranaire du procédé d'étirage-soufflage avec une loi d'Ogden [MAR99].	46
Figure 2-9. Milieu avec une configuration intermédiaire [BOU06].	47
Figure 2-10. Configurations successives au cours de la simulation de la mise en forme d'un pot de yaourt [AGA02].	48
Figure 3-1. Résultats de simulation de mises en forme réalisées avec Plast pour différents renforts.	56
Figure 3-2. Repères isoparamétrique et numérotation de l'élément triangle et de l'élément quadrangle.	61
Figure 3-3. Structure de la subroutine Fortran.	67
Figure 3-4. Courbe de traction à température ambiante pour le film PS (a) et le film PC (b).	68
Figure 3-5. Courbe DMA du film PS soumis à une rampe de température [THE12].	69
Figure 3-6. Courbe DMA du film PC soumis à une rampe de température.	70
Figure 3-7. Courbe DSC du film PS (a) et du film PC (b) [THE12].	71
Figure 3-8. Rhéomètre à contrainte imposée.	72
Figure 3-9. Variation du module élastique d'un polymère – application de la superposition temps-température [CAR99].	72
Figure 3-10. Courbe maîtresse du film PS avec une température de référence de 130°C.	73
Figure 3-11. Courbe maîtresse du film PC avec une température de référence de 180°C [THE12].	74
Figure 3-12. Élément de référence.	75
Figure 3-13. Test de cisaillement simple.	75

Figure 3-14 Validation de test de cisaillement (comparaison numérique et analytique de la composante $\sigma_{xy}$ du tenseur des contraintes de Cauchy) .....	76
Figure 3-15 Test de traction .....	76
Figure 3-16 Validation de test de traction.....	77
Figure 3-17 Vérification de l'hypothèse d'incompressibilité du matériau .....	78
Figure 3-18 Test de cisaillement oscillant .....	78
Figure 3-19 Validation de test en cisaillement oscillant (Composante $\sigma_{xy}$ du tenseur des contraintes de Cauchy) .....	79
Figure 3-20 Déplacement imposé à l'élément .....	80
Figure 3-21 Validation du test de relaxation (Composante $\sigma_{xy}$ du tenseur des contraintes de Cauchy) .....	80
Figure 4-1 Spectre d'émission du rayonnement [MON01] .....	85
Figure 4-2 Bilan radiatif d'une surface .....	86
Figure 4-3 Différents types de réflexion d'une surface .....	86
Figure 4-4 Facteur de forme entre deux facettes.....	87
Figure 4-5 Illustration des différents types d'échanges thermiques intervenant dans l'étape de chauffage par infrarouge .....	88
Figure 4-6 Illustration des échanges conductifs entre éléments au sein du film.....	91
Figure 4-7 Illustration du principe de lancer de rayon pour le calcul des facteurs de forme entre les éléments du film et du moule .....	93
Figure 4-8 Principe de lancer de rayon pour le calcul des facteurs de forme entre les lampes chauffantes et les éléments du film et du moule .....	94
Figure 4-9 Process expérimental du CETIM .....	97
Figure 4-10 Moule du prototype du CETIM.....	98
Figure 4-11 Dimensions (en mm) du moule en forme Demi-œuf du CETIM.....	98
Figure 4-12 Positionnement de la caméra IR.....	99
Figure 4-13 Distribution de la température sur la surface avant du film PS.....	100
Figure 4-14 Positionnement des quatre points choisis.....	101
Figure 4-15 Evolution de la température prédite du film pour quatre positions (simulation).....	101
Figure 4-16 Capacité calorifique du PS en fonction de la température .....	102
Figure 4-17 Cartographie de la température du film pour différents étapes de chauffage ...	104
Figure 4-18 Evolution de la température en deux positions du film.....	104
Figure 5-1. Pièce du démonstrateur du CETIM .....	109
Figure 5-2 Géométries des Outils .....	110
Figure 5-3 Déformée du film thermoformé dans le moule demi-œuf.....	110
Figure 5-4 Comparaison de déformée d'un film thermoformé dans le moule du CETIM....	111
Figure 5-5 Distribution de l'élongation longitudinale après formage suivant un arc situé sur le fond du demi-œuf (en haut sur la Figure) .....	112
Figure 5-6 Cartographie des épaisseurs .....	112
Figure 5-7 Système stéréoscopique.....	113
Figure 5-8 Mouchetis noir sur le demi-œuf thermoformé et résultats de stéréo-corrélation	113
Figure 5-9 Définition de la transformation .....	114
Figure 5-10 Répartition des épaisseurs suivant un arc situé sur la partie concave du demi-œuf. Comparaison de l'expérimentation avec la simulation .....	115
Figure 5-11 Répartition des épaisseurs suivant un arc situé sur la longueur du demi-œuf. Comparaison de l'expérimentation avec la simulation .....	115
Figure 5-12 Géométrie des outils.....	116

Figure 5-13 Comparaison des dimensions géométriques des deux démonstrateurs du consortium.....	117
Figure 5-14 Maillage du film et du moule .....	117
Figure 5-15 Cartographie de la température sur le film .....	117
Figure 5-16 Comparaison de l'expérimentation avec la simulation .....	118
Figure 5-17 Cartographie des épaisseurs obtenues par la simulation.....	119
Figure 5-18 Comparaison de l'épaisseur déterminé expérimentalement et obtenue par simulation selon un arc situé positionné sur la pièce .....	119
Figure 5-19 Mise en forme de la cavité du démonstrateur du PEP .....	120
Figure 5-20 Comparaison de l'épaisseur du film formé en différents points sur la cavité du démonstrateur du PEP .....	121

## Tableaux

Tableau 1 Caractéristiques et plages de thermoformabilité des principaux polymères utilisés en thermoformage (A : amorphe, SC : semi-cristallin) [JAM98].....	26
Tableau 2 Différents schémas d'intégration temporelle .....	58
Tableau 3 Paramètres $C_1$ et $C_2$ pour le film PS .....	73
Tableau 4 Paramètres $C_1$ et $C_2$ pour le film PC.....	74
Tableau 5 Valeurs de $h_{c1}$ en fonction de la position du film et de la différence de température entre l'air et le film (cas convection naturelle) .....	96
Tableau 6 Paramètres de thermoformage .....	98



# Introduction générale

Les matières plastiques jouent un rôle prédominant dans l'industrie de l'emballage, le secteur automobile et les équipements domestiques lorsqu'il s'agit de fournir la qualité, le confort et l'esthétique. Ainsi, afin de répondre à l'exigence croissante des consommateurs concernant le design et l'esthétique des produits de consommation, il est nécessaire de développer des techniques de décoration de plus en plus pointues. Les processus de décoration les plus utilisés sont principalement les techniques de thermoformage ou de surmoulage.

Malgré l'apparente simplicité des procédés de thermoformage et de surmoulage, ces procédés sont en fait des procédés techniques, difficiles à optimiser, dans lesquels le matériau subit de très grandes déformations.

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un projet collaboratif de recherche de la région Rhône Alpes de type FUI (Fond Unique Interministérielle) associant plusieurs laboratoires et plusieurs industriels ainsi que des centres techniques et visant à développer une technologie de décoration en 3 dimensions ainsi qu'un logiciel performant d'aide à la conception. Ce projet est donc fortement pluridisciplinaire. Les domaines ciblés par le projet sont les équipements domestiques et le secteur de l'automobile. Les partenaires du projet IMD3D, qui couvrent l'ensemble des domaines ayant attrait à la décoration de pièces plastiques, sont :

- ✓ Des entreprises utilisatrices des techniques de décoration :
  - La société Calor filiale du groupe SEB qui développe et commercialise notamment des centrales vapeurs (porteur du projet)
  - La société Plastigray équipementier automobile
  - La société Plastiform spécialisée dans le procédé de thermoformage
  - La société VPI confectionnant des emballages de produits de luxe
- ✓ Des laboratoires des recherche :
  - L'ingénierie des Matériaux Polymères (I.M.P)
  - Le laboratoire de Mécanique des contacts et des structures (LaMCoS) de l'INSA de Lyon
  - Le laboratoire d'Informatique en Image et Système d'information (LIRIS) de l'Université Claude Bernard Lyon 1
- ✓ Des entreprises dont les secteurs d'activités sont fortement liés aux finalités du projet :
  - La société Jers qui imprime des décors sur les films



- La société Toray qui fabrique des films polyesters
- La société Wittman fabricant de robots pour les applications de décoration
- ✓ Des entreprises utilisatrices des techniques de décoration :

L'objectif majeur du projet est d'augmenter les performances des techniques actuelles de décoration par thermoformage de films polymères décorés sur des surfaces 3D. Nous pouvons répartir les travaux de recherches réalisés dans ce projet en 3 axes principaux :

1. l'étude du comportement thermomécanique des polymères thermoplastiques déformés à l'état caoutchoutique ainsi que la caractérisation mécanique et thermique des films étudiés
2. l'étude de la déformation des films polymères au cours de leurs mises en forme, la modélisation et la simulation du procédé concerné.
3. l'étude des transformations à appliquer sur l'image décor afin d'obtenir le rendu escompté sur la pièce (plaquage de texture, calcul de l'anamorphose).

Notre travail est impliqué dans l'axe N°2 du Projet. Les objectifs fixés concernent le développement d'un modèle numérique dédié à la mise en forme des films polymères minces par le procédé de thermoformage. Ce procédé, comprend deux étapes principales. La première étape, dite *chauffage thermique*, consiste à chauffer le film par infrarouge à une température telle qu'il soit flexible mais encore suffisamment rigide pour résister à son propre poids, avant que celui-ci n'épouse la forme du moule par aspiration lors de la seconde étape, dite *formage*.

La simulation de la mise en forme des films polymères a plusieurs objectifs. Elle permet de déterminer la faisabilité, ou les conditions de cette faisabilité et surtout elle permet de résoudre les nombreuses problématiques concernant la maîtrise des propriétés finales du film de décoration, tels que sa distribution d'épaisseur. Les simulations évitent les coûteuses études expérimentales par essais-erreurs.

Ce manuscrit s'articule autour de cinq chapitres :

- Le premier chapitre introduit les matériaux polymères et particulièrement les polymères amorphes. Il présente les différentes techniques de décoration avec un intérêt tout particulier au procédé de thermoformage dans lequel se place notre étude.
- Le second chapitre est consacré à la présentation des concepts de base de la mécanique des milieux continus nécessaires au développement de lois de comportement en

grandes transformations. Un état de l'art des différentes lois de comportements existants, de leurs avantages et inconvénients seront également présentées.

- Le troisième chapitre vise à présenter une loi de comportement viscoélastique non-isotherme développée pour décrire le comportement du film thermoplastique au cours de sa déformation. La méthode d'implémentation de cette loi de comportement dans le code de calcul *Plast* sera décrite, et la validation de cette loi de comportement sera également exposée.
- Le quatrième chapitre porte sur la modélisation et la simulation du chauffage infrarouge du film. L'objectif est prédire avec fiabilité la distribution de température du film à l'issue du chauffage IR, en vue d'intégrer cette cartographie de température dans la loi de comportement exposée dans le chapitre précédent.
- Dans le dernier chapitre, des simulations de mise en forme sur deux démonstrateurs distincts du consortium sont présentées. Ces simulations donnent des informations telles que la déformation du film durant sa mise en forme ainsi que la distribution d'épaisseur de ce dernier, critère principal permettant d'apprécier la qualité de la pièce thermoformée. Ces simulations seront validées par comparaison avec des essais expérimentaux réalisés sur des pilotes industriels.



# Chapitre 1      Présentation des polymères et leur mise en œuvre

*Ce premier chapitre est une introduction concernant les matériaux polymères et leur fabrication. Après une présentation générale des matériaux polymères, les différentes classes de polymères seront présentées. Nous présenterons un état de l'art concernant les différentes techniques de décoration des pièces plastiques et plus particulièrement la technique de thermoformage utilisé pour ajuster le film aux formes souhaitées.*

## SOMMAIRE DU CHAPITRE

1.1	PRESENTATION GENERALE DES MATERIAUX POLYMERES.....	16
1.2	POLYMERES AMORPHES .....	17
1.2.1	Structure locale d'un polymère amorphe.....	17
1.2.2	Le phénomène de transition vitreuse / Influence sur les propriétés mécaniques .....	18
1.3	POLYMERES SEMI-CRISTALLINS .....	19
1.4	LA MISE EN FORME DES FILMS POLYMERES : TECHNIQUES DE DECORATION .....	20
1.4.1	In-Mould-Labeling (IML).....	21
1.4.2	In-Mould-Decoration (IMD) .....	22
1.4.3	Tampographie.....	22
1.4.4	Le surmoulage (Insert Moulding).....	22
1.4.5	Le thermoformage .....	24
	CONCLUSION DU CHAPITRE 1.....	22
		15

# Présentation générale des matériaux polymères

Par définition, les *matériaux polymères* sont des matériaux composés de longues chaînes moléculaires appelées macromolécules. La notion de macromolécule n'a commencé à être largement acceptée par la communauté scientifique qu'à partir des années 1920. Hermann Staudinger (Prix Nobel de chimie en 1953) en a été l'un des principaux artisans.

Les macromolécules sont typiquement formées de plusieurs milliers de motifs structuraux simples appelés *mère*.

Selon le comportement mécanique des polymères, on peut distinguer trois grandes classes de polymères: les thermodurcissables, les élastomères et les thermoplastiques.

- Les thermodurcissables

Les matériaux thermodurcissables sont des solides infusibles qui forment un réseau tridimensionnel à partir de groupes de monomères liés entre eux par une densité élevée de liaisons primaires. Les thermodurcissables sont transformés de façon irréversible par la chaleur ou en présence d'un catalyseur. Leurs propriétés mécaniques finales favorables et leur faible viscosité avant durcissement expliquent l'exploitation des thermodurcissables comme matrice dans les matériaux composites structuraux.

- Les élastomères

Les élastomères ou matériaux caoutchoutiques sont des solides souples à température ambiante et peuvent être considérés comme des thermodurcissables formés de chaînes peu compactées et très mobiles. L'avantage principal des élastomères est leur faible rigidité en changement de forme. En effet, les élastomères peuvent supporter de très importantes déformations avant rupture.

- Les thermoplastiques

Les thermoplastiques représentent 80 % de la production mondiale de matières plastiques. Ce sont des matériaux généralement souples. Ils sont formés de longues chaînes bien compactées et mises en forme par chauffage et refroidissement.

Selon leurs structures, les thermoplastiques sont répartis en deux grandes familles: les amorphes et les semi cristallins (figure 1-1) :

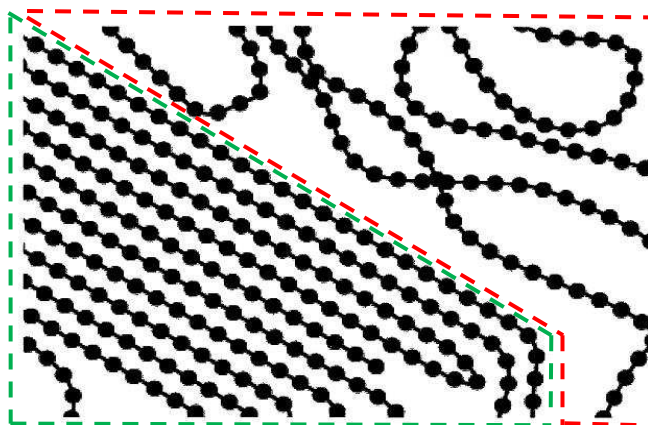


Figure 1-1. Schématisation d'une organisation macromoléculaire cristalline (encadrée en vert) et amorphe (encadrée en rouge) [ZIN10].

Dans le cadre de cette étude nous nous intéresserons seulement aux matériaux thermoplastiques. Plus précisément, le polystyrène et le polycarbonate en tant que polymères thermoplastiques amorphes et le polypropylène en tant que polymère thermoplastique semi-cristallin.

## 1.1 Polymères amorphes

Un matériau polymère résulte d'une réaction chimique appelée *polymérisation* ou le procédé par lesquels des petites molécules « *monomères* » réagissent entre elles pour former des molécules de masses molaires plus élevées formant des macromolécules. Les dispositions configurationnelles (arrangement topologique des atomes au sein du monomère) ainsi que les spécificités de réalisation tel que la cinétique de refroidissement conduisent à un état partiellement ou totalement désordonné de la matière. Le polymère est dit amorphe si le désordre moléculaire est complet.

### 1.1.1 Structure locale d'un polymère amorphe

La structure des polymères amorphes est souvent comparée à un plat de spaghetti cuits, cependant une chaîne polymère est bien plus longue par rapport à sa largeur qu'un morceau de spaghetti. La description de cette structure est souvent caractérisée par la pelote gaussienne (modèle de base pour la description des polymères amorphes). La figure 1-2 illustre les résultats d'une simulation de la structure amorphe d'un polymère [SUT94] :

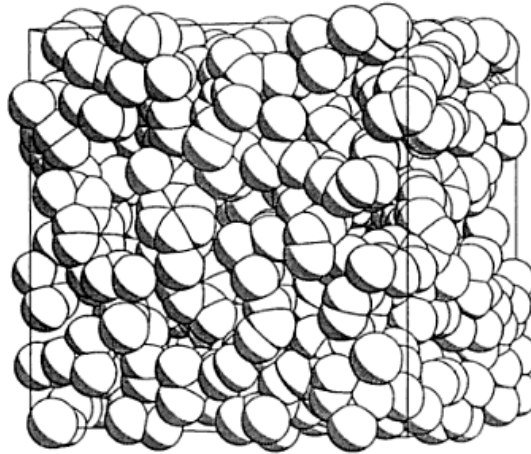


Figure 1-2. Représentation de la structure d'un polymère amorphe simulée par ordinateur [SUT94]

Cette figure donne une indication de la structure désordonnée ainsi que du taux d'interpénétration des chaînes polymères. Nous pouvons constater donc facilement le rôle important de l'enchevêtrement des chaînes dans le comportement dynamique des polymères amorphes.

### 1.1.2 Le phénomène de transition vitreuse / Influence sur les propriétés mécaniques

#### 1.1.2.1 Phénoménologie de la transition vitreuse

Les polymères amorphes se caractérisent par une transition vitreuse. Cette transition vitreuse  $T_g$  est le passage d'un état vitreux à un état caoutchoutique. Elle correspond au passage d'une agitation moléculaire locale de faible amplitude ( $T < T_g$ ) à une agitation importante s'étendant sur l'ensemble des chaînes moléculaires ( $T > T_g$ ). La transition vitreuse est parmi les premiers paramètres que l'on mesure lors de la synthèse d'un polymère. Elle joue un rôle central dans les propriétés des matériaux polymères et plus particulièrement dans les propriétés mécaniques.

#### 1.1.2.2 Propriétés mécaniques

Une des manifestations les plus importantes de la transition vitreuse est la variation des propriétés mécaniques aux environs de la température de transition vitreuse  $T_g$ . On distingue trois régimes de comportement distincts (voir figure 1-3) pour les polymères amorphes :

- L'état vitreux en dessous de  $T_g$  : le polymère est rigide, avec un module d'Young de l'ordre de 3 GPa, et la cohésion est majoritairement assurée par le champ de force créé par les liaisons intermoléculaires
- La zone de transition dans un régime de température allant de  $T_g - 20$  K à  $T_g + 20$  K est caractérisée par une diminution du module d'Young  $E$  et de cisaillement  $G$  de 2 à 4 ordres de grandeur.
- L'état caoutchoutique (plateau caoutchoutique) au-dessus de  $T_g$  est caractérisé par des valeurs du module d'Young et de cisaillement de l'ordre de quelques MPa, le matériau pouvant subir des allongements hyperélastiques considérables. Dans ce régime de comportement, ce sont les forces intramoléculaires, relatives aux liaisons chimiques, qui prédominent.

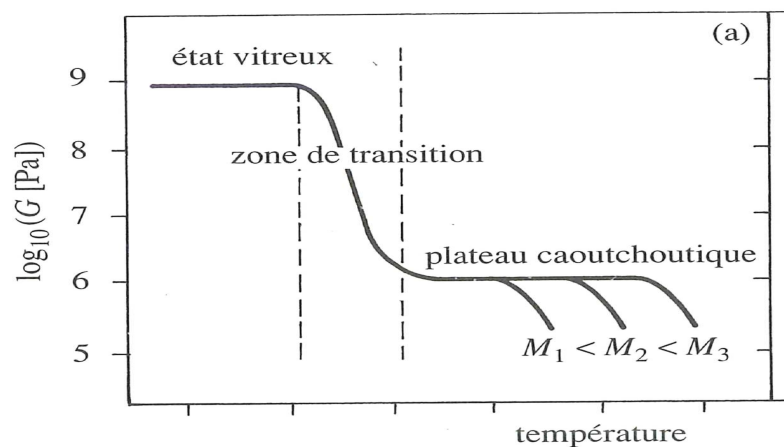


Figure 1-3. Variation schématique du module de cisaillement en fonction de la température pour un polymère amorphe [KAU99]

L'étendue du plateau caoutchoutique dépend fortement de la masse molaire (cf. figure 1-3). Ainsi le plateau est absent pour des chaînes de faible masse molaire.

## 1.2 Polymères semi-cristallins

### 1.2.1.1 Cristallisation

L'état cristallin est caractérisé par l'existence d'un ordre à grande échelle. Les chaînes se combinent en ordre régulier, définissant une maille cristalline qui se répète périodiquement



dans l'espace. Des microstructures organisées (lamelles, sphérolites) apparaissent. L'état cristallin possède les propriétés suivantes:

- existence d'une température de fusion  $T_f$ , en dessous de laquelle les polymères peuvent cristalliser. Les chaînes peuvent ainsi réduire leur énergie libre en s'organisant de manière ordonnée.
- volume spécifique cristallin inférieur au volume spécifique amorphe (arrangement moléculaire plus compact).
- rigidité supérieure à celle de la phase amorphe.

Cependant, les polymères ne cristallisent jamais totalement, pour des raisons d'irrégularités et de défauts dans la structure moléculaire. Coexistent alors dans des proportions variables une phase amorphe et une phase cristalline; on parle de polymère semi-cristallin.

#### 1.2.1.2 Propriétés mécaniques des semi-cristallins

Le comportement mécanique de cette classe de matériau présente donc deux températures caractéristiques : la température de transition vitreuse de la phase amorphe  $T_g$  et la température de fusion  $T_f$  de la phase cristallisée. On distingue donc les régimes des comportements distincts suivants :

- en dessous de la température de transition vitreuse  $T_g$ , un polymère rigide de module d'Young voisin des polymères amorphes vitreux.
- un matériau plus souple entre la température de transition vitreuse  $T_g$  et la température de fusion  $T_f$  à cause de la phase amorphe caoutchoutique mais avec une bonne résistance grâce à la présence des cristallites.
- au-dessus de la température de fusion  $T_f$ , l'état visqueux ou viscoélastique.

### 1.3 La mise en forme des films polymères : techniques de décoration

La mise en forme des films polymères de décorations est principalement réalisée par les processus de thermoformage ou de surmoulage (Insert Moulding) afin d'ajuster le film aux formes souhaitées. Cependant, il existe de nombreux procédés de décoration dont les techniques ne nécessitent pas une déformation du film dans le moule. Les procédés varient en fonction de la nature des films, de la forme géométrique des pièces, de l'importance des séries

à effectuer, de la cadence et du coût de production recherchés. Nous allons faire ici une description simplifiée de quelques processus de décoration pour finalement nous concentrer sur le procédé qui nous concerne : le thermoformage.

### 1.3.1 In-Mould-Labeling (IML)

La technique In-Mould-Labeling (voir figure 1-4) consiste à positionner un film plastique imprimé et pré-découpé (étiquette) à l'endroit désiré de la pièce à produire. Le film est fixé par la mise sous vide ou par charge électrostatique et la pièce est ensuite injectée. Cette technique est bien adaptée aux surfaces planes.

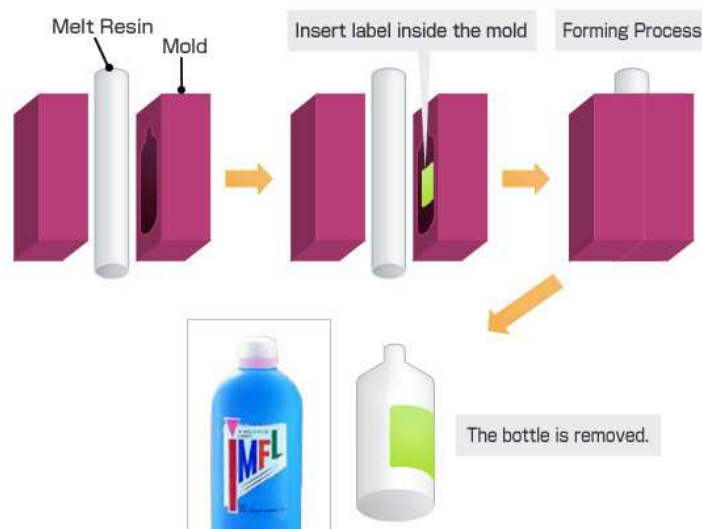


Figure 1-4. Schéma du procédé d'IML (In Mould Labeling)

L'IML en 5 étapes :

- Impression et pré-découpe de l'étiquette.
- Saisie de l'étiquette et conduite dans le moule par l'appareil de manutention.
- Transfert et fixation dans la zone de cavité (la mise sous vide, charge électrostatique).
- Injection derrière étiquette dans le moule.
- Prélèvement de la pièce finie et introduction d'une nouvelle étiquette.

### 1.3.2 In-Mould-Decoration (IMD)

Cette technologie consiste, dans la plupart des cas, à ce qu'un film comporte une image imprimée qui est utilisée en tant que décoration de la pièce moulée. Le film est positionné et fixé par un cadre de serrage entre les deux parties du moule. Ensuite, le mouvement de fermeture du moule adapte légèrement le film à la forme de la cavité. Comme pour le procédé IML, la matière plastique est fixée par la mise sous vide.

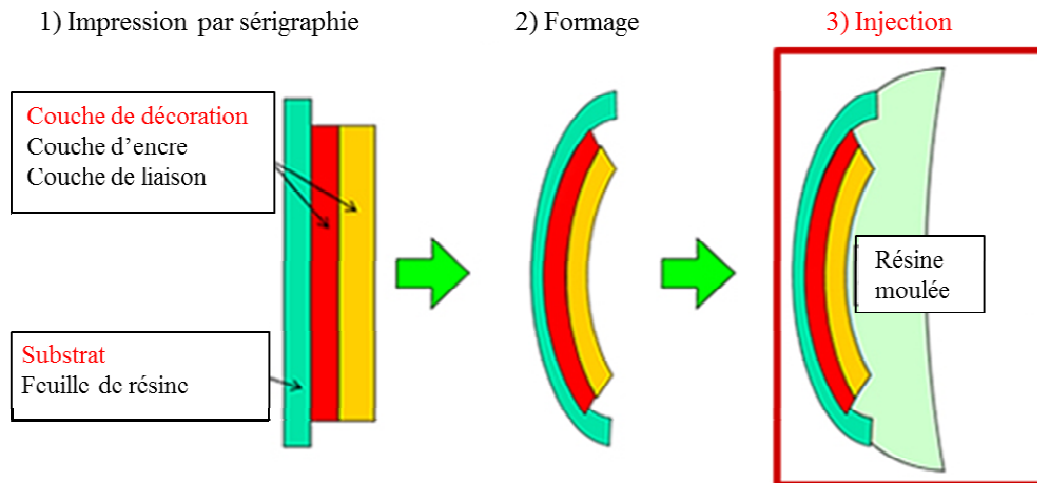


Figure 1-5. Schéma du procédé d'IML (In Mould Labeling)

### 1.3.3 Tampographie

La tampographie est une technique d'impression généralement sur des formes régulières. Elle consiste à transférer un dessin sur la pièce injectée en venant déposer sur celle-ci de l'encre directement avec l'aide d'un tampon. La pièce subit au préalable un traitement type flammage afin d'augmenter l'affinité de l'encre sur le polymère.

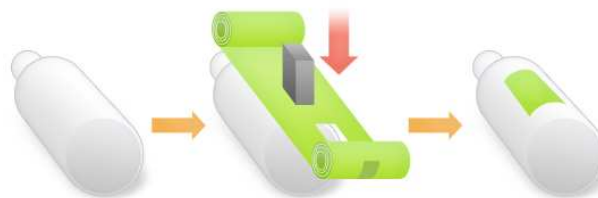


Figure 1-6. Schématisation de la technique de tampographie

### 1.3.4 Le surmoulage (Insert Molding)

La technologie de surmoulage [SAN06] est une combinaison entre la technique de thermoformage et la technique d'injection. Elle consiste à placer dans le moule de la presse à

injecter un film imprimé et préformé (par une étape de thermoformage) pour appliquer la décoration dans le moule. L'avantage de cette technologie est que la géométrie de l'insert peut être travaillée dans les trois dimensions. Cependant, et à la différence des autres procédés de décoration (tels l'IML et l'IMD), les films imprimés sont plus épais et résistants. Les bases du surmoulage sont proches de celle du moulage classique, mais avec des contraintes dues à la nature de l'insert et à la nécessité d'utiliser des moules adaptés.

Le principe du procédé de surmoulage consiste à mettre en place, dans l'empreinte d'une cavité d'un moule d'injection, une pièce A (l'insert) et à injecter une matière B. Le remplissage de l'empreinte permet de réaliser le surmoulage de la pièce A avec la matière B :

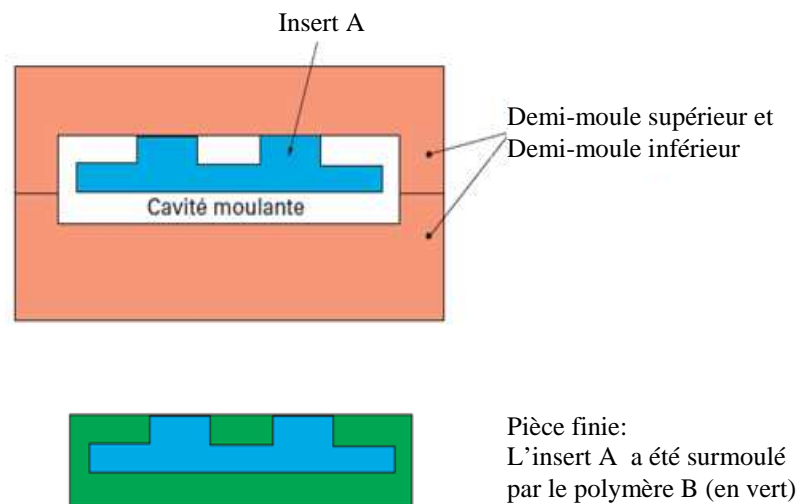


Figure 1-7. Schématisation du procédé de surmoulage

Ainsi, les différentes étapes de l'Insert-Moulding sont :

- Impression du film et du décor au moyen de différentes techniques d'impression.
- Chauffage du film à la température de déformation.
- Formage, refroidissement et estampage pour obtenir l'insert.
- Moulage de l'insert dans le moule.
- Prélèvement de la pièce et insertion d'un nouvel insert.

### 1.3.5 Le thermoformage

Le thermoformage est l'un des grands procédés de mises en forme des polymères thermoplastiques [CHO08, LEE01] permettant de réaliser, à partir de feuilles ou de plaques généralement extrudées, des objets concaves d'épaisseurs et de dimensions diverses. Il consiste à chauffer le film de polymère à une température permettant sa déformation dans un moule (thermoformage négatif) ou sur un moule (thermoformage positif) dont il épousera la forme par action d'une différence de pression entre ses faces. On obtient après refroidissement l'objet désiré.

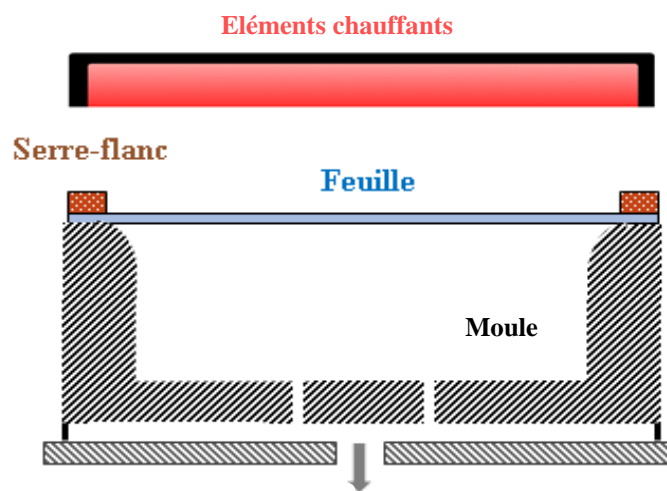


Figure 1-8. Principe du thermoformage : Thermoformage négatif

On distingue ainsi deux étapes principales pour le procédé de thermoformage : la première est le chauffage du film et la seconde est la phase de formage :

- **Chauffage du film**

La feuille est chauffée à une température permettant sa déformation, c'est-à-dire à une température telle qu'elle soit flexible mais encore suffisamment rigide pour résister à son propre poids.

La mode de déformation imposé par ce procédé est du type étirage, uni ou bi-axial ainsi que du cisaillement. Celui-ci s'effectue à des températures un peu au-delà de la transition vitreuse pour les polymères amorphes et autour de la température de fusion pour les polymères semi-cristallins. Pour les thermoplastiques amorphes, la plage de température de formage est assez large comparée à celle des thermoplastiques semi-cristallins (cf. figure 1-9).

En effet les semi-cristallins présentent une grande variation des propriétés mécaniques autour de la température de fusion.

Le thermoformage de ces matériaux semi-cristallins nécessite un meilleur contrôle ainsi qu'une meilleure homogénéité de la température de la feuille.

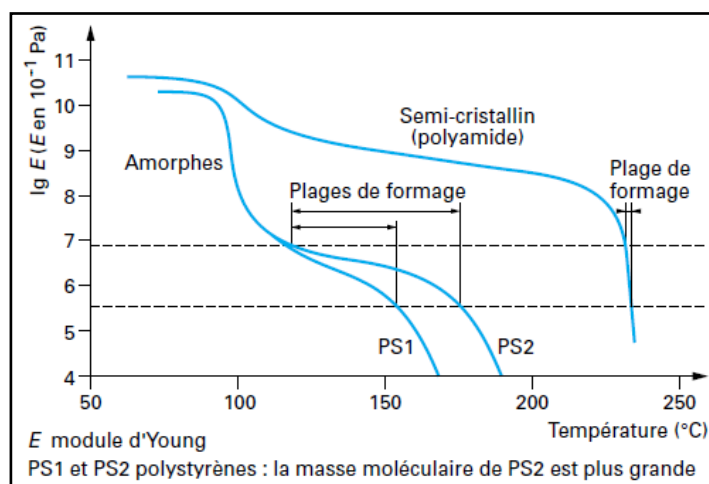


Figure 1-9. Plage de thermoformage pour différents types de polymères [JAM98]

Ainsi, les polymères amorphes se situent, pour leur facilité de mise en œuvre, en tête des applications de thermoformage (PS, ABS,...). Cependant, les avancées technologiques sur les formulations et sur les outils de production de ces dernières décennies ont permis l'utilisation croissante des polymères semi-cristallins en thermoformage (comme par exemple le polypropylène et le polyéthylène téréphtalate).

Le tableau 1 ci-dessous regroupe les caractéristiques de thermoformabilité des principales classes de polymères utilisées en thermoformage, leurs températures caractéristiques (température de transition vitreuse  $T_g$ , et/ou de fusion  $T_f$ ) et leur plage de mise en forme (plage de formage) :

Polymère	Type	Tg (°C)	Tf (°C)	Plage de formage (°C)
Polystyrène (PS)	A	90	-	130 – 182
Poly-chlorure de vinyle (PVC)	A	90	-	100 – 155
Poly-acryl butadiène styrène (ABS)	A	90-120	-	130 – 180
Poly-méthylméthacrylate (PMMA)	A	100	-	150 – 190
Polycarbonate (PC)	A	150	-	170 – 200
Polypropylène (PP)	SC	5	165	150 – 165
Polyéthylène téréphtalate (PET)	SC	70	255	120 – 180
Polyéthylène haute densité (PEHD)	SC	-110	134	130 - 185

Tableau 1 Caractéristiques et plages de thermoformabilité des principaux polymères utilisés en thermoformage (A : amorphe, SC : semi-cristallin) [JAM98]

Les systèmes de chauffage utilisés dans l'industrie sont principalement de deux types : à infrarouge ou par contact :

Les systèmes de chauffage par infrarouge utilisent la faculté des polymères à absorber le rayonnement infrarouge, ils sont les plus fréquents en thermoformage. Deux types de lampes infrarouges sont couramment utilisés : les lampes à quartz et les céramiques. La céramique émet des longueurs d'onde plus hautes que le quartz, cependant le quartz est préféré lorsque des temps de réponses courts sont nécessaires. L'avantage du chauffage par rayonnement infrarouge est qu'il permet une mise en chauffe plus rapide de la feuille, en revanche il peut poser des problèmes de surchauffe en surface.

Le chauffage par contact (conduction à partir d'un bloc métallique chaud) est fréquemment utilisé pour les matériaux thermoformés à basse température. Il est donc peu utilisé pour les matériaux semi-cristallins qui sont mis en forme au voisinage de leur température de fusion. Cependant l'avantage de ce type de chauffage est qu'il permet un bon contrôle de la température et limite les problèmes de surchauffe.

### • **Formage**

La géométrie de la pièce à réaliser va imposer le type de moule et par conséquent, le type de formage. On distingue généralement deux modes principaux de formage : Le formage négatif et le formage positif. Pour le cas où le moule est positif, le thermoformage est appelé drapage car la feuille préchauffée est drapée sur le moule par la pression atmosphérique externe. L'air entre le moule et la feuille est aspiré par une pompe à vide. L'inconvénient

principal des moules positifs est la difficulté de démoulage engendrée par le retrait des matériaux lors du refroidissement. Afin de minimiser ce problème, des systèmes mécaniques ou une pression d'air peuvent être employés pour aider au démoulage. En ce qui concerne le thermoformage négatif, le moule est conçu comme une cavité percée de petits orifices nécessaires à l'évacuation de l'air piégé entre la feuille et le moule. La mise en forme de la feuille avec ce type de moule s'effectue généralement par une pression d'air et le démoulage s'effectue sans difficulté, du fait du retrait des produits lors du refroidissement. En revanche, le coût de fabrication est plus élevé que pour un moule positif car il faut en général enlever plus de matière que dans les cas des moules métalliques.

Enfin, notons que la qualité finale de la pièce thermoformée dépend pour une large part de la qualité initiale de la feuille (homogénéité de l'épaisseur, absence de gels ou de particules solides dans la feuille,...). Par exemple, si la feuille de départ présente une irrégularité d'épaisseur, le chauffage va être inhomogène, pouvant entraîner des déchirures lors du formage. De plus, ces feuilles sont obtenues par extrusion dans une filière plate avec refroidissement en calandre avant d'être enroulées en bobine. Elles peuvent donc présenter des orientations et/ou contraintes résiduelles figées au cours du refroidissement pouvant conduire à la formation de plis sur la pièce formée.

L'un des autres éléments fondamentaux pour la qualité finale de l'objet formé est l'étape de chauffage. En effet, une température bien définie et homogène à la surface du film est difficile à obtenir, et toute hétérogénéité de température peut conduire à des défauts comme des déchirements ou des hétérogénéités importantes de la déformation.

## Conclusion du chapitre 1

Dans ce premier chapitre, les différentes classes de polymères ont été présentées dans leur globalité, Nous avons décrit les différents régimes distincts du comportement mécanique des polymères thermoplastiques amorphes, ainsi que des polymères semi-cristallins. Nous avons présenté les différentes techniques de décoration, évoquées leurs avantages et leurs inconvénients. Le procédé de thermoformage dans lequel se place notre étude a été présenté en détail. Les difficultés que pose ce genre de procédé ont été mises en évidence.



Nous avons vu que la mise en forme des films polymères par le procédé de thermoformage nécessitait une très bonne connaissance des caractéristiques des polymères utilisés mais également une bonne maîtrise et connaissance des paramètres du procédé.

Il nous faut donc mieux connaître la mécanique au sein de notre matériau en vue de la simulation du comportement de ce dernier au cours du thermoformage. Le prochain chapitre détaille principalement les différentes approches existantes pour modéliser le comportement mécanique des polymères.

# Chapitre 2      Différentes approches pour la simulation de la mise en forme des films polymères

*Dans ce chapitre, les différents modèles et lois de comportement permettant à l'heure actuelle de simuler le comportement mécanique des polymères seront présentés ainsi que leurs avantages et les éventuelles limites de leur domaine d'application. Seront abordés des modèles de comportement viscoélastiques, hypérelastiques, viscoplastiques et visco-hypérelastiques. Ce chapitre débute par un bref rappel des concepts de base de la mécanique des milieux continus en grandes transformations.*

## SOMMAIRE DU CHAPITRE

2.1	ELEMENTS DE LA CINEMATIQUE DES GRANDES TRANSFORMATIONS .....	30
2.1.1	Tenseur gradient de la transformation.....	30
2.1.2	Mesures des déformations .....	33
2.1.3	Vitesses de déformation.....	34
2.2	DESCRIPTION DES EFFORTS INTERNES .....	35
2.3	DUALITE CONTRAINTES – DEFORMATIONS .....	36
2.4	CARACTERISATION MECANIQUE DES POLYMERES .....	37
2.4.1	Rappels sur la rhéologie des polymères.....	37
2.4.2	Le principe de superposition de Boltzmann .....	38
2.5	MODELISATION DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES POLYMERES .....	40
2.5.1	Loi de comportement viscoélastique.....	40
2.5.2	Lois de comportement hyperélastique .....	44
2.5.3	Lois de comportement visco-hyperélastiques.....	46
2.5.4	Lois de comportement viscoplastiques .....	47
2.5.5	Modélisation de la thermodépendance des lois de viscosité.....	48
	CONCLUSION DU CHAPITRE 2.....	48

## 2.1 Eléments de la cinématique des grandes transformations

L'implémentation de lois de comportement en grandes transformations nécessite une description des mouvements au sein du milieu continu qui dépasse le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Nous allons présenter les concepts et grandeurs de base utilisés en mécanique des milieux continus en grandes transformations.

### 2.1.1 Tenseur gradient de la transformation

Une grandeur fondamentale dans la description de la déformation d'un corps est le gradient de la transformation noté  $\underline{\underline{F}}$ . Ce tenseur d'ordre deux permet de relier la position relative de deux particules voisines avant et après déformation. C'est donc l'élément de base pour définir la déformation d'un corps.

Pour décrire localement la transformation, nous considérons deux points matériels  $Q_1$  et  $Q_2$  situés dans le voisinage d'un point matériel P (cf. Figure 2-1). Les positions relatives de  $Q_1$  et  $Q_2$  par rapport à P sont données par les vecteurs élémentaires  $d\underline{X}_1$  et  $d\underline{X}_2$  :

$$\begin{aligned} d\underline{X}_1 &= \underline{X}_{Q_1} - \underline{X}_P \\ d\underline{X}_2 &= \underline{X}_{Q_2} - \underline{X}_P \end{aligned} \quad (2.1)$$

De plus, la transformation d'un milieu continu, occupant le volume  $\Omega_0$  dans la configuration de référence et le volume  $\Omega$  dans la configuration actuelle, peut être décrite par une application  $\chi$  bijective qui fait correspondre à chaque position initiale  $\underline{X} \in \Omega_0$  une position actuelle  $\underline{x} \in \Omega$  :

$$\underline{x} = \chi(\underline{X}) \quad (2.2)$$

Le caractère bijectif s'explique par l'hypothèse de non interpénétrabilité de deux particules matérielles.

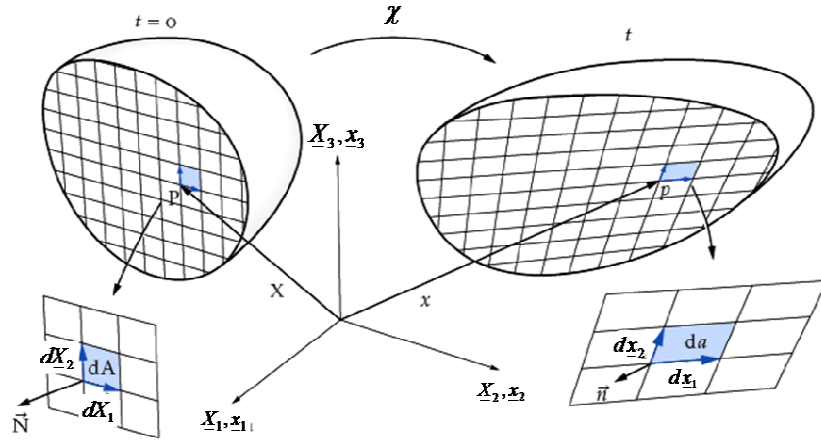


Figure 2-1. Définition tenseur gradient de la transformation – Figure extraite de [MOE11]

Après déformation les positions des particules  $P$ ,  $Q_1$  et  $Q_2$  sont données par la transformation  $\chi$  :

$$\begin{aligned}\underline{x}_p &= \chi(\underline{X}_p, t) \\ \underline{x}_{q_1} &= \chi(\underline{X}_{q_1}, t) \\ \underline{x}_{q_2} &= \chi(\underline{X}_{q_2}, t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Et les vecteurs transformés s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}d\underline{x}_1 &= \underline{x}_{q_1} - \underline{x}_p = \chi(\underline{X}_p + d\underline{X}_1, t) - \chi(\underline{X}_p, t) \\ d\underline{x}_2 &= \underline{x}_{q_2} - \underline{x}_p = \chi(\underline{X}_p + d\underline{X}_2, t) - \chi(\underline{X}_p, t)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Nous définissons le tenseur gradient de transformation par :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \chi(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}}\tag{2.5}$$

Il est également appelé tenseur jacobien de l'application  $\chi$ . Le vecteur  $d\underline{x}$  se met alors sous la forme :

$$d\underline{x} = \frac{\partial \chi}{\partial \underline{X}} \cdot d\underline{X} = \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{X}\tag{2.6}$$

Ainsi défini, le tenseur gradient de transformation  $\underline{\underline{F}}$  transforme un vecteur de la configuration de référence  $d\underline{X}$  en un vecteur  $d\underline{x}$  de la configuration actuelle. Il constitue donc une description locale de la transformation du solide.

#### 2.1.1.1 Transformation d'un élément de volume

La transformation d'un élément de volume  $dV \subset \Omega_0$  de la configuration de référence en un élément  $dv \subset \Omega$  dans la configuration actuelle est donnée par le jacobien de la transformation, c'est-à-dire par le déterminant du tenseur gradient de transformation :

$$dv = JdV, \quad J = \det(\underline{\underline{F}}) \quad (2.7)$$

Le jacobien de la transformation est utile pour la transformation des intégrales de volume de la configuration actuelle vers la configuration de référence :

$$\int_v a(\underline{x}) dv = \int_V a(\underline{x}(\underline{X}, t)) J dV \quad (2.8)$$

De plus, l'application  $\chi$  étant bijective, son jacobien  $J$  sera toujours strictement positif, ce qui revient à dire que le volume de l'élément de matière défini par le volume élémentaire  $dV$  ne peut s'annuler.

#### 2.1.1.2 Transformation d'un élément de surface

Considérons un élément de surface dans la configuration de référence  $d\underline{A} = dA \underline{N}$  de normale  $\underline{N}$ . La surface devient après déformation  $d\underline{a} = da \underline{n}$ , de normale  $\underline{n}$ . Afin d'établir une relation entre ces deux vecteurs, nous considérons le vecteur matériel  $d\underline{L}$  qui après déformation devient  $d\underline{l}$ . Ainsi les volumes initiaux et actuels sont :

$$\begin{aligned} dV &= d\underline{L} \cdot d\underline{A} \\ dv &= d\underline{l} \cdot d\underline{a} \end{aligned} \quad (2.9)$$

En utilisant (3.7) et le fait que  $d\underline{l} = \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{L}$ , nous pouvons écrire :

$$d\underline{l} \cdot d\underline{a} = J d\underline{L} \cdot d\underline{A} \Rightarrow (\underline{\underline{F}} \cdot d\underline{L}) \cdot d\underline{a} = J d\underline{L} \cdot d\underline{A} \quad (2.10)$$

D'où la formule classique (dite de Nanson) transformant un élément de surface :

$$d\mathbf{a}_n = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} dA \quad (2.11)$$

### 2.1.2 Mesures des déformations

Le tenseur gradient de transformation décrit les transformations locales du milieu étudié. Ces transformations se décomposent en rotations de corps rigide et en déformations de la matière. D'où le théorème de la décomposition polaire du gradient de la transformation (cf figure 2-2) :

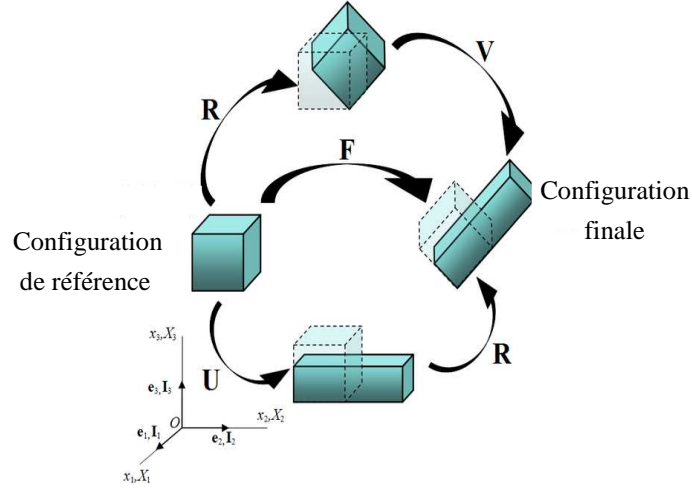


Figure 2-2. Représentation de la décomposition polaire du gradient de la transformation

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (2.12)$$

Où  $\mathbf{R}$  est un tenseur de rotation

$\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont des tenseurs symétriques définis positifs appelés tenseurs de déformation pure.

On peut étudier le produit scalaire de deux vecteurs élémentaires en configuration déformée afin d'étudier les variations de longueur et d'angle au sein du solide. Ce qui permet d'introduire deux tenseurs supplémentaires :

- le tenseur de Cauchy-Green droit  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{v} &= du_i dv_i = F_{ij} dU_j F_{ik} dV_k = dU_j F_{ji}^T F_{ik} dV_k \\ &= d\mathbf{U} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{V} \\ &= d\mathbf{U} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{V} \end{aligned} \quad (2.13)$$

- le tenseur des dilatations de Green-Lagrange  $\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{C} - \mathbf{I})$

$$\begin{aligned}
d\underline{u} \cdot d\underline{v} - d\underline{U} \cdot d\underline{V} &= d\underline{U} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot d\underline{V} - d\underline{U} \cdot d\underline{V} \\
&= d\underline{U} \cdot (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}) \cdot d\underline{V} \\
&= d\underline{U} \cdot 2\underline{\underline{E}} \cdot d\underline{V}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

En petites déformations, ce tenseur se confond avec le tenseur des déformations linéarisé  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ . Enfin, notons que les deux tenseurs sont définis sur la configuration initiale (ils sont dits *Lagrangien*).

### 2.1.3 Vitesses de déformation

L'écriture des types de loi de comportement viscoélastiques, ainsi que la puissance des efforts internes (cf. 3.3), nécessitent de définir la notion de vitesse de déformation. En différentiant l'équation(2.6), on obtient :

$$d\underline{\dot{x}} = \underline{\dot{F}} \cdot d\underline{X} = \underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot d\underline{x} = \underline{\underline{l}} \cdot d\underline{x} \tag{2.15}$$

Le tenseur  $\underline{\underline{l}}$  est appelé *tenseur gradient de vitesse*. Il est classiquement décomposé en un terme symétrique  $\underline{\underline{d}}$  (*tenseur taux de déformation*) et un terme antisymétrique  $\underline{\underline{\omega}}$  (*tenseur taux de rotation*) :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{l}} &= \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\omega}} \\
\underline{\underline{d}} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T), \quad \underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{F}}^T)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Le tenseur taux de déformation est une mesure de la vitesse de déformation dans la configuration actuelle. La mesure de la vitesse de déformation dans la configuration initiale s'obtient en différentiant l'équation (2.13):

$$\underline{\underline{\dot{E}}} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\dot{C}}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{d}} \cdot \underline{\underline{F}} \tag{2.17}$$

## 2.2 Description des efforts internes

On considère un solide déformable virtuellement coupé en deux sous domaines, avant et après transformation (figure 2-3). L'équilibre de chacun des deux sous domaines impose l'existence de forces internes à la frontière entre les deux. Ainsi le *vecteur contrainte* est défini localement par :

$$\underline{t} = \frac{d\underline{f}}{ds} \quad (2.18)$$

Avec  $ds$  un élément de surface infinitésimal positionné à la frontière entre les deux sous domaines et  $d\underline{f}$  un élément d'effort. D'après le théorème de Cauchy, ce vecteur contrainte ne dépend, au point considéré, que de la normale  $\underline{n}$  à la surface élémentaire  $ds$  considérée. Il existe donc un tenseur d'ordre deux, que l'on appellera *tenseur des contraintes de Cauchy*  $\underline{\underline{\sigma}}$ , tel que :

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \quad (2.19)$$

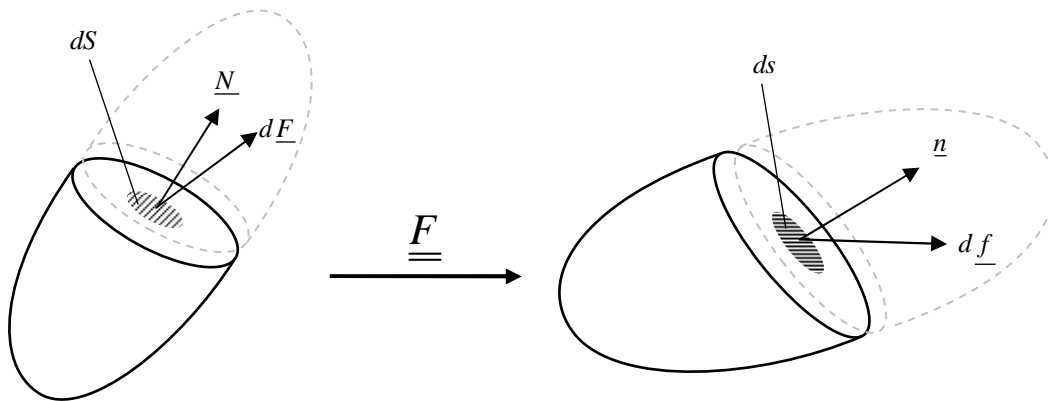


Figure 2-3. Définition des efforts internes

De plus, Le tenseur de Cauchy représente les efforts internes exprimés dans la configuration actuelle, et l'effort exercé sur la surface élémentaire s'écrit :

$$d\underline{f} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} ds \quad (2.20)$$



Il est possible de définir d'autres mesures des efforts internes. Ainsi, en notant  $d\underline{F}$ ,  $dS$  et  $\underline{N}$  l'effort, la surface et sa normale ramenés en configuration initiale, on définit les trois tenseurs  $\underline{\underline{S}}$  et  $\underline{\underline{P}}$  :

$$\begin{aligned} d\underline{f} &= \underline{\underline{P}} \cdot \underline{N} dS \\ d\underline{F} &= \underline{\underline{S}} \cdot \underline{N} dS \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ces tenseurs sont respectivement appelés premier tenseur de Piola-Kirchhoff et second tenseur de Piola-Kirchhoff. A partir des définitions (2.20) et (2.21), on obtient le tenseur de Kirchhoff  $\underline{\underline{\tau}}$  :

$$\underline{\underline{\tau}} = J^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.22)$$

Nous nous retrouvons donc, pour décrire les contraintes, avec quatre tenseurs, chacun possèdent ses avantages et inconvénients. Cependant, le tenseur de Kirchhoff  $\underline{\underline{\tau}}$  et le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{P}}$  n'ont pas de signification physique directe, tandis que tenseur de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  et le premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{S}}$  caractérisent directement les efforts appliqués [SID82].

Enfin, notons que le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  est dit *Eulérien* car il permet d'obtenir le vecteur contrainte dans la configuration actuelle en fonction de la normale dans cette même configuration. A l'inverse, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{S}}$  est Lagrangien.

## 2.3 Dualité contraintes – déformations

La puissance des efforts intérieurs s'écrit sous la forme [SAL05] :

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \left( \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}) \right)^T d\Omega \quad (2.23)$$

Avec  $\underline{\underline{\sigma}}$  le tenseur des contraintes de Cauchy introduit précédemment et  $\underline{v}$  le champ de vitesse au point considéré. Par ailleurs,  $\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v})$  n'est autre que le tenseur gradient de vitesse :

$$\underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \right) \frac{\partial X_k}{\partial x_j} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{l}} \quad (2.24)$$

En utilisant la décomposition sphérique / déviatorique de  $\underline{\underline{l}}$  et la symétrie de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , on fait apparaître la dualité du tenseur des contraintes de Cauchy avec le tenseur taux de déformation :

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} d\Omega \quad (2.25)$$

On note  $p_i$  la puissance massique des efforts intérieurs,  $\rho$  la densité en configuration actuelle, et  $\rho_0$  la densité en configuration initiale :

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\Omega} \rho p_i d\Omega = - \int_{\Omega_0} \rho_0 p_i d\Omega_0 \quad (2.26)$$

En utilisant l'expression (2.26) de la puissance des efforts intérieurs, ainsi que des relations entre les différentes mesures de contraintes, cette puissance massique s'écrit :

$$p_i = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{E}}} = \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\dot{F}}} \quad (2.27)$$

Où  $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}$  représente la puissance des efforts internes par unité de volume final, tandis que les termes  $\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{E}}}$  et  $\underline{\underline{P}} : \underline{\underline{\dot{F}}}$  représentent la puissance des efforts internes par unité de volume initial. Ces différentes formulations vont nous être utiles dans le modèle pour déterminer la contrainte à partir de la déformation.

## 2.4 Caractérisation mécanique des polymères

### 2.4.1 Rappels sur la rhéologie des polymères

La rhéologie est la science de la déformation de la matière. Elle permet de caractériser la réponse des matériaux à une sollicitation mécanique.

Les matériaux polymères présentent, sur une large gamme de température, un comportement viscoélastique. Ce comportement viscoélastique est intermédiaire entre :

- Un solide élastique parfait (solide de Hooke) dont la contrainte  $\sigma$  nécessaire à la déformation d'un tel solide est instantanée et proportionnelle à cette déformation  $\varepsilon$  ( $E$  désigne le module de rigidité):

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.28)$$

- Un fluide visqueux idéal dont la contrainte nécessaire à sa déformation est proportionnel à la vitesse de déformation. Dans ce cas, la déformation est permanente car il y a dissipation de l'énergie de déformation ( $\eta$  désigne la viscosité qui est définie comme étant le rapport entre la contrainte et la vitesse de déformation) :

$$\eta = \tau / \dot{\gamma} \quad (2.29)$$

Le comportement viscoélastique se traduit donc par une réponse réversible mais fonction du temps. De plus, selon le régime de sollicitation accessible (faible déformation, grande déformation), les fonctions viscoélastiques telles que la viscosité ne dépendent pas des mêmes variables physiques. En effet, plus la sollicitation sera de grande amplitude ou rapide, plus la réponse au polymère deviendra dépendante de l'amplitude, de la vitesse et de la nature de déformation [MAC94, MAC94a]. Nous pouvons donc considérer deux domaines de viscoélasticité distincts:

- Le domaine de viscoélasticité pour lequel la réponse au polymère est indépendante de l'amplitude de déformation, ce qui est le cas pour de petites déformations.
- Le domaine viscoélasticité non-linéaire pour lequel la rigidité et la viscosité du polymère sont fonction de l'amplitude de déformation.

Avant d'aborder les diverses approches existantes pour modéliser le comportement mécanique des polymères, il convient d'effectuer un rappel sur le principe de superposition de Boltzmann.

## 2.4.2 Le principe de superposition de Boltzmann

Ce principe gouverne toute la théorie de la viscoélasticité linéaire et également à la base des théories de la viscoélasticité non-linéaire (domaine des grande déformations) qui seront évoquées par la suite. Il permet d'expliciter pourquoi les tests rhéologiques caractérisent le

comportement viscoélastique des polymères mesurant leur module de relaxation, qui représente le rapport entre la contrainte mesurée et la déformation imposée [DEA90].

Le principe de superposition de Boltzmann consiste à supposer dans les limites de la viscoélasticité linéaire que pour une série de sauts de déformation imposée, la contrainte résiduelle mesurée est la somme des contributions en contrainte de chaque déformation élémentaire (figure 2-4):

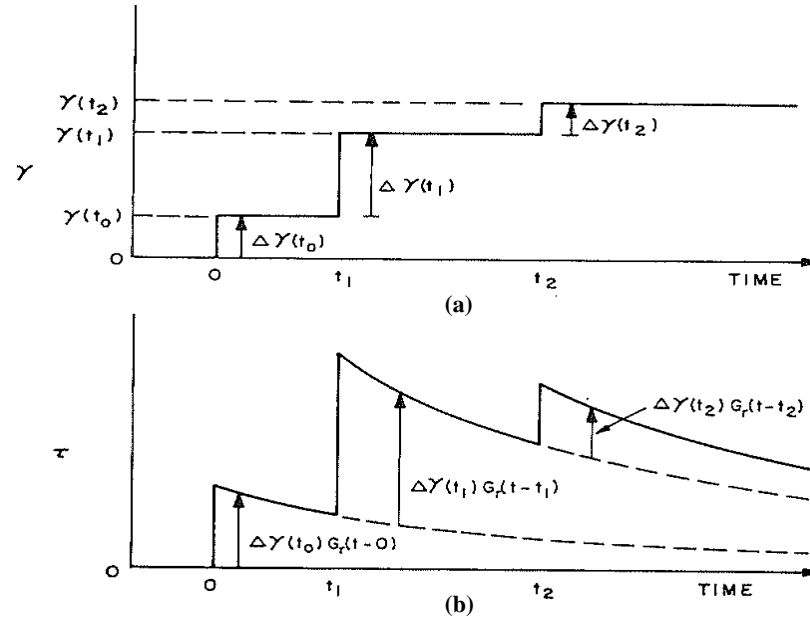


Figure 2-4. Sollicitation quelconque considérée comme (a) une succession d'échelons  $\Delta\gamma_i$  imposés par pas de temps, (b) réponse correspondant à (a)

### Principe de Boltzmann

$$\sigma(t) = \sum_i \Delta\gamma_i G(t - t_i) \quad (2.30)$$

$\sigma(t)$  désignant la contrainte,  $\Delta\gamma_i$  la déformation élémentaire et  $G(t - t_i)$  le module de relaxation.

## 2.5 Modélisation du comportement mécanique des polymères

La grande diversité des approches existantes pour modéliser le comportement mécanique des polymères montre qu'il est difficile de bâtir une loi de comportement adaptée à un large spectre de conditions de mise en oeuvre (température, vitesse de déformation, ...).

Nous pouvons classer les approches adoptées en quatre catégories : les modèles de type *viscoélastique*, les modèles *hyperélastiques*, les modèles *viscoplastiques* et les modèles *visco-hyperélastiques*. L'objectif ici est de présenter les principales caractéristiques de ces lois de comportement, leurs domaines de validité ainsi que leurs principaux avantages et inconvénients. Autrement dit, de présenter un état de l'art des lois mises en oeuvre pour simuler le procédé de thermoformage.

### 2.5.1 Lois de comportement viscoélastique

Les modèles viscoélastiques sont particulièrement utilisés pour modéliser les comportements dépendant de la vitesse de déformation [GRE57, SIM87a, SAA03]. Ils existent deux domaines de viscoélasticité distincts: le comportement viscoélastique linéaire et le domaine de viscoélasticité non- linéaire pour lequel la rigidité et la viscosité du polymère sont fonction de l'amplitude de déformation. Nous introduisons en premier lieu les notions fondamentales de la viscoélasticité linéaire ainsi que les différents modèles existants. Par la suite, nous étudions plus en détails la modélisation en viscoélasticité non linéaire.

#### 2.5.1.1 Comportement viscoélastique linéaire

La théorie de la viscoélasticité linéaire permet de prendre en compte le phénomène de la dissipation d'énergie au cours du temps tout en conservant la réversibilité de la déformation. D'une façon générale, la loi de comportement d'un matériau viscoélastique linéaire exprime la correspondance fonctionnelle entre l'histoire des contraintes et l'histoire des déformations, linéairement par rapport à la déformation. Ainsi, à chaque instant  $t$ , les contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  dépendent de l'histoire de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  jusqu'à cet instant :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = f \left[ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\tau) \right]_{0 \leq \tau \leq t}$$

La description du comportement linéaire peut s'effectuer au moyen de modèles rhéologiques plus ou moins complexes. Ils sont constitués de l'adjonction en série et/ou en parallèle de ressorts (éléments élastiques) et d'amortisseurs (éléments visqueux) [RAU02]. A titre d'exemple le **modèle de Maxwell** est le modèle le plus simple de la viscoélasticité linéaire [BIR87, AGA96]. Il rend compte du caractère à la fois élastique et visqueux des polymères en associant en série un ressort de module élastique  $E$  et un amortisseur de viscosité  $\eta$  (figure 2-5). De plus, dans ce modèle, un seul temps de relaxation  $\lambda = \eta / E$  est défini pour le polymère.



Figure 2-5. Élément de Maxwell linéaire

Un autre exemple à exposer est le **modèle de Zener** (représenté figure 2-6) qui convient pour décrire le comportement viscoélastique linéaire d'un matériau sous une contrainte quelconque (essai de fluage, relaxation de contrainte), contrairement au modèle de Maxwell qui convient seulement pour décrire la relaxation de contrainte.

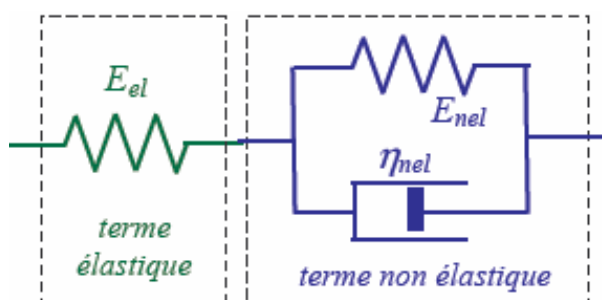


Figure 2-6. Modèle de Zener; 2 composantes à la déformation totale

Cependant, cette modélisation ne rend compte que partiellement du comportement des polymères commerciaux qui ont une large distribution de temps de relaxation. Elle n'est donc pas représentative de la structure interne du polymère. Pour pallier cette limitation, des modèles viscoélastiques généralisés basés sur des assemblages suivant différentes configurations de modèles rhéologiques simples, permettent d'affiner la modélisation du comportement viscoélastique linéaire dans une large marge de distributions de temps de relaxation.

Dans cet axe, [DIO95] décrit le **modèle de Maxwell généralisé** (Figure 2-7) qui fait intervenir  $N$  éléments de Maxwell associés en parallèle. Chacun des éléments étant caractérisé

par un temps de relaxation  $\lambda_i$ . L'ensemble des caractéristiques  $(\lambda_i, E_i)$  de ce modèle forme le spectre discret des temps de relaxation. A partir de ce spectre, on peut connaître les paramètres rhéologiques du polymère. Ainsi le module de relaxation  $g(t)$  et la fonction mémoire  $m(t)$  correspondantes sont obtenus par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{i=1}^N E_i \times \exp(-t / \lambda_i) \\ m(t) &= \sum_{i=1}^N \frac{E_i}{\lambda_i} \times \exp(-t / \lambda_i) \end{aligned} \quad (2.31)$$

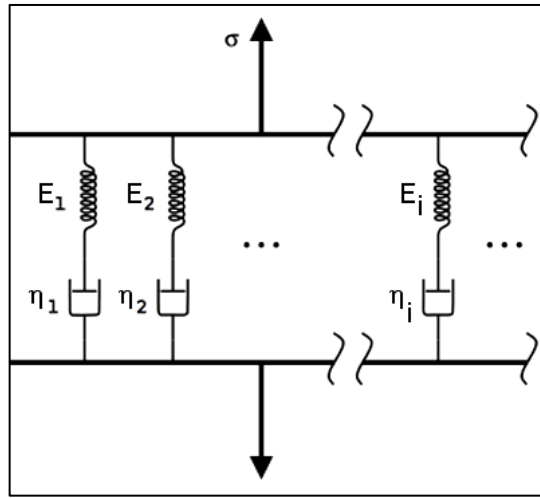


Figure 2-7 Modèle de Maxwell généralisé

L'équation constitutive de ce modèle peut s'écrire soit sous forme différentielle, soit sous forme intégrale faisant intervenir le tenseur de déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}(t)$  :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \int_{-\infty}^t g(t-s) \frac{d}{ds} \underline{\underline{\epsilon}}(t,s) ds \quad (2.32)$$

Avec  $g(t)$  désignant la fonction de relaxation du modèle.

Un autre modèle de viscoélasticité linéaire existant dans la littérature que nous pouvons citer, est le **modèle de Lodge** [LOD64]: Ce modèle propose une extension de l'équation constitutive du solide caoutchoutique (incompressible). Enfin, notons que ces modèles représentatifs de la viscosité linéaire ne conviennent que pour des déformations suffisamment faibles.

### 2.5.1.2 Comportement viscoélastique non linéaire

L'hypothèse des petites perturbations est très restrictive et peu adaptée dès lors que l'on s'intéresse à la mise en œuvre des polymères où les conditions de déformations sont plus sévères. Différentes approches sont abordées pour étudier le comportement viscoélastique des polymères en grandes déformations. Ces approches sont généralement de formulations intégrables :

Ces formulations consistent à écrire une relation entre les contraintes et l'histoire de la déformation, en partant :

- de l'hypothèse du matériau à mémoire évanescence
- du second principe de la thermodynamique
- de la généralisation du principe de superposition de Boltzmann

La plupart de ces formulations présente l'avantage de traduire la réponse différée des matériaux à mémoire évanescence, avec un nombre limité de paramètres constitutifs et identifiables via des essais caractéristiques tels que les essais statiques (essai de relaxation ou de fluage) et les essais dynamiques (essai vibratoire) [THE12].

Parmi elles, nous pouvons citer :

- Le modèle de **SIMO** [SIM87a] :

Ce modèle est basé sur une décomposition additive des contraintes élastique et viscoélastique avec un découplage des réponses déviatorique et isochore :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = -p \underline{\underline{I}} + \int_{-\infty}^t g(t-s) \frac{d}{ds} (dev \left\{ \partial_e \bar{W}^\circ [\underline{\underline{e}}(s)] \right\}) ds \quad (2.33)$$

On note  $p$  la pression hydrostatique,  $g(t)$  la fonction relaxation du modèle et  $\bar{W}^\circ(\underline{\underline{e}})$  la partie déviatorique du tenseur de déformation.

- Le modèle de **Bernstein, Kearsly et Zapas** [BER63, BER65]

Ce modèle proposé par Bernstein, Kearsly et Zapas est à la base des idées développées pour rendre compte du comportement non-linéaire des polymères. Il relie le tenseur des contraintes au tenseur des déformations par l'intermédiaire des invariants des tenseurs de Cauchy  $(I_1, I_2, I_3)$ , de l'inverse du tenseur de Cauchy et de la notion d'énergie potentielle élastique



$\psi = \psi(I_1, I_2, t - s)$ . Ce potentiel varie avec la déformation suivant les deux premiers invariants  $(I_1, I_2)$  du tenseur de Cauchy  $\underline{\underline{C}}$  sous l'hypothèse du matériau incompressible. Et donc le troisième invariant  $I_3$  n'engendre pas de variation de volume.

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = -p\underline{\underline{I}} + \int_{-\infty}^t g(t-s) \frac{d}{ds} (2\underline{\underline{F}} \frac{\partial \psi(I_1, I_2)}{\partial \underline{\underline{C}}} \underline{\underline{F}}^T) ds \quad (2.34)$$

Où  $p$  est la pression hydrostatique,  $g(t)$  la fonction relaxation du modèle et  $\underline{\underline{F}}$  le gradient de transformation.

Par ailleurs, nous présenterons cette dernière formulation de manière plus explicite ultérieurement. (cf chapitre 3).

Enfin, notons que cette approche a engendré d'autres nombreuses formulations dans le cadre des grandes transformations [SCH98]. Une revue détaillée des lois de comportement viscoélastiques les plus couramment utilisées est présentée par [SCH95].

## 2.5.2 Lois de comportement hyperélastique

Un matériau hyperélastique est par définition un matériau non dissipatif dont l'énergie de déformation ne dépend que de l'état actuel des déformations du matériau. Ainsi, pour établir la loi de comportement d'un matériau hyperélastique, il suffit donc de déterminer l'énergie de déformation  $w$  correspondant au comportement mécanique du matériau considéré. De plus, il faut que cette énergie de déformation vérifie plusieurs conditions :

- $w$  respecte le principe d'indifférence matérielle et les symétries du matériau [CIA88].
- $w$  s'annule lorsque le matériau est dans son état naturel (sans sollicitation) :

$$w(\underline{\underline{I}}) = 0 \quad (2.35)$$

L'équation suivante constitue l'expression générale des lois de comportement hyperélastiques pour les matériaux incompressibles :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{2}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T - p\underline{\underline{I}} \quad (2.36)$$

Avec  $J$  le déterminant du tenseur gradient de la transformation et  $\underline{\underline{C}}$  le tenseur de Cauchy-Green droit.

Ces modèles sont classiquement utilisés pour décrire le comportement caoutchoutique des matériaux et donc généralement utilisés pour les matériaux élastomères. En revanche, du fait de leur nature purement élastique, elles ne prennent pas en compte l'influence de la vitesse de déformation et donc ne permettent pas de décrire les aspects visqueux de la déformation. Malgré cet inconvénient, les modèles hyperélastiques ont été largement utilisés pour décrire le comportement mécanique des polymères amorphes [MER06, CHA07]. Parmi ces modèles, on peut citer : le modèle de Rivlin et le modèle de Ogden.

### 2.5.2.1 Modèle de Rivlin

Le modèle de Rivlin [RIV48] décrit l'énergie de déformation en une série de polynômes :

$$w = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (2.37)$$

Avec  $I_1, I_2$  les deux premiers invariants du tenseur de Cauchy Green droit  $C$  et  $C_{ij}$  des coefficients élastiques.

De plus,  $C_{00} = 0$  afin que l'énergie de déformation s'annule lorsque le matériau n'est pas sollicité.

Trois modèles classiques découlent de ce modèle de Rivlin :

- le modèle néo-hookéen :  $w = C_{10} (I_1 - 3)$
- le modèle de Mooney-Rivlin :  $w = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3)$
- le modèle de Yeoh :  $w = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3$

### 2.5.2.2 Modèle de Ogden

Dans le modèle de Ogden [OGD84], l'énergie de déformation est écrite en fonction des déformations principales  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  :

$$w = \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{\alpha_k} (\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3) \quad (2.38)$$

Avec  $\mu_k$  des coefficients élastiques

On peut montrer que le modèle de Mooney-Rivlin est également un cas particulier du modèle d'Ogden pour :

$$N = 2, \mu_1 = 2C_1, \mu_2 = -2C_2, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2$$

Le modèle d'Ogden est particulièrement adapté aux très grandes déformations de matériaux caoutchoutiques. La Figure 2-8 présente un exemple résultat de mise en forme obtenu à l'aide de ce modèle :

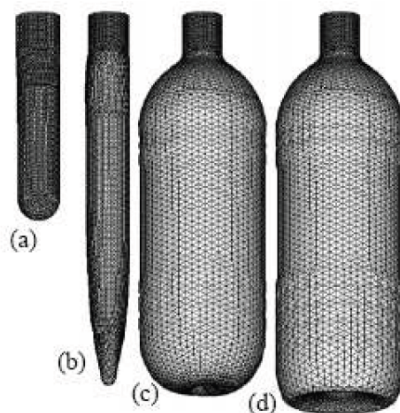


Figure 2-8 Modélisation membranaire du procédé d'étirage-soufflage avec une loi d'Ogden  
[MAR99]

D'autres potentiels hyperélastiques ont été développés dans la littérature, un récapitulatif des principaux modèles est réalisé par [VER97].

### 2.5.3 Lois de comportement visco-hyperélastiques

Dans le but de prendre en compte l'effet de la vitesse de déformation. Il est possible d'ajouter une composante visqueuse à un modèle hyperélastique. Les modèles obtenus par ce biais sont donc visco-hyperélastiques. Ces modèles sont basés sur une approche à variables internes [SID74] et établis sous un ensemble d'hypothèses :

- Une formulation en grandes transformations.
- Le matériau est supposé homogène et isotrope.
- La notion de configurations intermédiaires et la décomposition multiplicative du gradient de la transformation en gradients élastiques et gradients anélastiques [SID75].
- L'incompressibilité de la transformation globale et des transformations anélastiques du matériau.

Cette *notion de configurations intermédiaires* (Figure 2-9) décrit le comportement viscoélastique en grande déformation, en considérant la transformation comme la composition d'une transformation purement élastique et d'une autre anélastique. La configuration intermédiaire est alors obtenue à partir de la configuration actuelle par relâchement élastique.

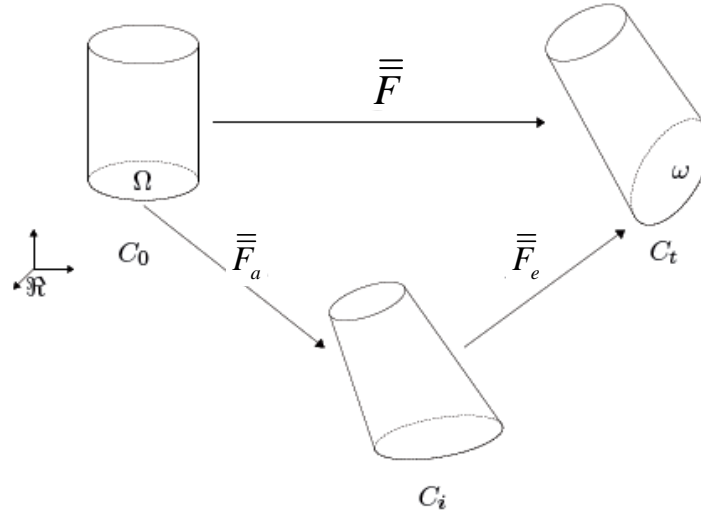


Figure 2-9 Milieu avec une configuration intermédiaire [BOU06]

Avec :

$C_0, C_i$  et  $C_t$  respectivement l'état de référence, l'état intermédiaire et l'état actuel.

$\underline{\underline{F}}$  le gradient de transformation élastique et  $\underline{\underline{F}}_a$  le gradient de transformation anélastique.

Ainsi le gradient de transformation  $\underline{\underline{F}}$  s'écrit :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_e \cdot \underline{\underline{F}}_a \quad (2.39)$$

Il sera de même pour chaque transformation des tenseurs cinématiques spécifiques (comme exemple, le tenseur de Cauchy-Green droit, les taux de déformation,...). Parmi ces modèles, nous pouvons citer les modèles rhéologiques de Poynting-Thomson et Zener qui ont été utilisés dans les travaux de [MEO00]. La précision de ces modèles est très satisfaisante mais au prix d'une multiplication des paramètres dont leur identification demeure difficile et délicate.

#### 2.5.4 Lois de comportement viscoplastiques

Les modèles viscoplastiques sont couramment utilisés pour la simulation du procédé d'étirage-soufflage [BOR09a, COS08]. Ces modèles permettent de prendre en compte la vitesse de déformation ainsi que le durcissement. Cependant, ils ne prennent pas en compte l'élasticité du matériau (toute déformation est considérée comme étant irréversible). Un autre inconvénient des modèles viscoplastiques est leur incapacité à représenter le comportement du

polymère sur une large gamme de températures et de déformations. Pour cela, la solution adoptée pour élargir le spectre de mise en oeuvre, est d'augmenter le nombre de paramètres constitutifs. Cependant, ceci rend l'identification des paramètres plus délicate, et réduit le sens physique du modèle notamment pour des applications liées au thermoformage.

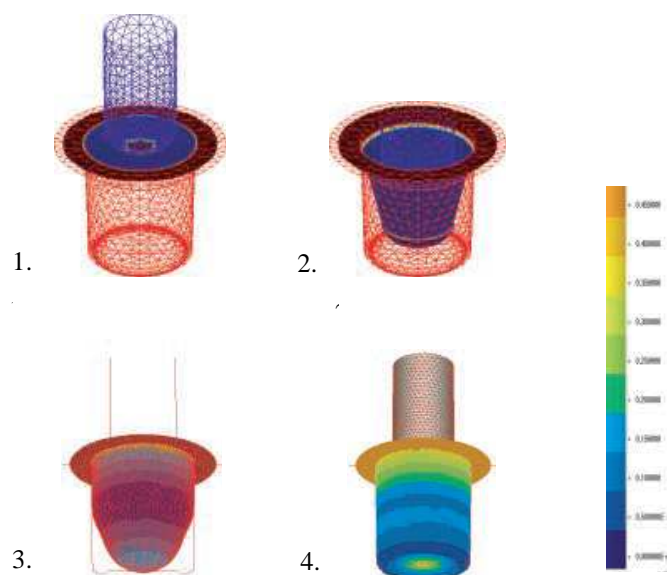


Figure 2-10 Configurations successives au cours de la simulation de la mise en forme d'un pot de yaourt [AGA02]

### 2.5.5 Modélisation de la thermodépendance des lois de viscosité

La thermodépendance des lois de viscosité est généralement implémentée dans la loi de comportement via plusieurs coefficients correcteurs (appelés facteurs de glissement). Les lois les plus couramment adoptées sont les lois de Williams, Landel et Ferry (WLF) [FER80] et d'Arrhénius [BIR87, MIR07]. Cependant, ils existent d'autres lois de type polynomial proposées par [WAN00]. Dans le cadre de notre étude, nous présenterons les lois de WLF et d'Arrhénius ainsi que leur domaine d'application ultérieurement.

## Conclusion du chapitre 2

A travers ce chapitre, différentes approches et lois de comportement pour la mise en forme des polymères ainsi que leurs avantages et leurs inconvénients ont été présentés. Ceci nous permettra, dans les chapitres qui suivent, de définir une loi de comportement adaptée aux films amorphes.

## Chapitre 3      Simulation de la mise en forme des films de polymères amorphes

*Dans ce chapitre, l'intégration des lois de comportement viscoélastiques isotropes non-linéaires dans le code PLAST est présentée. Le formalisme de la viscoélasticité pourra alors être présenté et introduit. Les différents types de schémas d'intégration temporels seront également décrits, et le choix de la loi de comportement pour la simulation de la mise en forme des films polymères amorphes sera justifié. La mise en forme des films polymères sera effectuée à l'aide d'un logiciel de calcul (PLAST) développé au sein du LaMCoS ayant fait ses preuves dans la mise en forme des composites [HAM09, BOI11], utilisant une discrétisation éléments finis avec des coques [HAM07]. La méthodologie d'implémentation d'une loi de comportement dans ce code de calcul sera présentée. L'identification des paramètres constitutifs de notre loi de comportement à l'aide de différents essais expérimentaux sera présentée. Ces essais ont été réalisés par A. Thevenon durant ses travaux de thèse.*

*Enfin, nous procédons à des tests de validation en vue de valider l'implémentation du modèle. Au cours de ces tests, les contraintes caractéristiques obtenues par simulation sont comparées aux contraintes théoriques.*



### 3.1 Choix d'une loi de comportement

La rhéologie des films polymères (amorphes ou semi-cristallins) joue un rôle majeur dans la modélisation du procédé de thermoformage. Cependant, l'étude du comportement rhéologique de ces films dépasse le cadre de nos travaux. Ainsi nous nous sommes appuyés sur les résultats d'un partenaire du consortium en charge de la caractérisation thermomécanique des films polymères. En effet, un des objectifs des travaux de Thevenon [THE12] était de caractériser les films polymères étudiés afin de fournir les paramètres constitutifs des lois de comportement réalistes et implémentables dans le code de calcul. De plus, les simulations de thermoformage que nous souhaitons mettre en œuvre sont destinées à être intégrées dans une boucle d'optimisation complètement automatisée afin de développer une technique de décoration en 3D.

Pour les raisons évoquées ci-dessus, notre choix de loi de comportement pour la mise en forme des films polymères s'est porté sur un modèle viscoélastique. Le choix d'utiliser des modèles viscoélastiques intégraux s'explique également par la plus grande pertinence physique de ce type de modèle en comparaison à des modèles différentiels et par la mise en forme de ces films qui s'effectue pour des températures supérieures à la température de transition vitreuse.

### 3.2 Formulation d'une loi de comportement viscoélastique non – isotherme

Une loi de comportement viscoélastique non-isotherme est proposée ici. Cette loi se base sur le modèle établi par Bernstein, Kearsly et Zapas [BER63, BER64, BER65]. Dans le cadre de notre étude, nous proposons d'implémenter la phase de chauffage du film dans la loi de comportement. En effet, le chauffage du film apparaît comme une étape critique du procédé de thermoformage. Le calcul de la distribution de température du film à l'issue du chauffage IR sera présenté ultérieurement. Dans un premier temps, nous détaillerons la formulation des modèles intégraux viscoélastiques, plus particulièrement le modèle K-BKZ. La formulation du modèle adopté est présentée partie 3.2.2. La thermo-dépendance des lois de viscosité est détaillée en partie 3.2.3.



### 3.2.1 Formulation de la loi viscoélastique isotherme de K-BKZ :

#### 3.2.1.1 Formulation de la loi de BKZ

Les lois viscoélastiques mises en œuvre pour modéliser le comportement des polymères amorphes sont généralement basées sur la loi de Bernstein, Kearsly et Zapas. Les modèles standards généralisés en tri-dimensions constituent le point de départ de la formulation des lois de BKZ [HAD88] :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = -p\underline{\underline{I}} + \int_{-\infty}^t g(t-s) \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \psi(\underline{\underline{\varepsilon}}(s))}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \right) ds \quad (3.1)$$

Ce matériau respecte le principe d'indifférence matérielle. Autrement dit, l'énergie de déformation  $\psi$  est une fonction du tenseur de Cauchy-Green droit [CIA88].

De plus le matériau est considéré isotrope, ainsi la fonction  $\psi$  peut être représentée par une fonction de trois invariants du tenseur argument [ITS00] :

$$\psi(\underline{\underline{C}}) \text{ est isotrope} \Leftrightarrow \exists \tilde{\psi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \psi(\underline{\underline{C}}) = \tilde{\psi}(I_1, I_2, I_3) \quad (3.2)$$

Les invariants classiquement utilisés pour définir la fonction  $\tilde{\psi}$  sont les coefficients du polynôme caractéristique de  $\underline{\underline{C}}$  :

$$\begin{aligned} I_1 &= Tr(\underline{\underline{C}}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2} (Tr(\underline{\underline{C}})^2 - Tr(\underline{\underline{C}}^2)) = (\lambda_1 \lambda_2)^2 + (\lambda_1 \lambda_3)^2 + (\lambda_2 \lambda_3)^2 \\ I_3 &= Det(\underline{\underline{C}}) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Toutefois dans notre cas nous nous basons sur les invariants du tenseur de Hencky  $\underline{\underline{H}}$  :

$$\begin{aligned} I_1 &= Tr(\underline{\underline{C}}^{-1}) \\ I_2 &= Tr(\underline{\underline{C}}) \quad \text{avec : } \underline{\underline{H}} = \frac{1}{2} \ln \underline{\underline{C}} = -\frac{1}{2} \ln \underline{\underline{C}}^{-1} \Leftrightarrow \underline{\underline{C}} = \exp(2\underline{\underline{H}}) \\ I_3 &= Det(\underline{\underline{C}}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Enfin, notons que le matériau étudié est considéré incompressible ce qui nous indique que  $I_3 = 1$ , et se traduit dans la loi de comportement par une pression hydrostatique  $P$ .

A partir de la dernière hypothèse et des équations précédentes, le tenseur de contraintes de Cauchy peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}}(t) &= -p\underline{\underline{I}} + \int_{-\infty}^t g(t-s) \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \psi(\underline{\underline{H}})}{\partial \underline{\underline{H}}} \right) ds = -p\underline{\underline{I}} + \int_{-\infty}^t g(t-s) \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{H}}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{H}}} \right) ds \\ &= -p\underline{\underline{I}} + \int_{-\infty}^t g(t-s) \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \cdot -2\underline{\underline{C}}^{-1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \cdot 2\underline{\underline{C}} \right) ds\end{aligned}\quad (3.5)$$

Avec :

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{H}}} &= \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{C}}^{-1}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{C}}^{-1}}{\partial \underline{\underline{H}}} = \underline{\underline{I}} \cdot -2\underline{\underline{C}}^{-1} = -2\underline{\underline{C}}^{-1} \\ \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{H}}} &= \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{H}}} = \underline{\underline{I}} \cdot 2\underline{\underline{C}} = 2\underline{\underline{C}}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Cette équation (3.5) ci-dessus constitue l'expression générale des matériaux viscoélastiques sous la forme de BKZ.

### 3.2.1.2 Le modèle de K-BKZ

Parallèlement aux travaux de BKZ, Kaye propose un nouveau modèle afin de palier le problème de surestimation de la contrainte prédite aux grandes déformations par le modèle BKZ en postulant que la fonction mémoire du matériau peut être exprimée comme le produit d'une fonction de temps et d'une fonction de la déformation (hypothèse de séparabilité) [WHI67].

Cette loi de comportement s'écrit:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = -p\underline{\underline{I}} + \int_{-\infty}^t M(t-s) \left[ h_1(I_1, I_2) \underline{\underline{C}}_t^{-1}(s) + h_2(I_1, I_2) \underline{\underline{C}}_t(s) \right] ds \quad (3.7)$$

La fonction mémoire  $M(t-s)$  ne dépendant que du temps, elle peut donc être facilement obtenue en connaissant le spectre des temps de relaxation.

Les fonctions  $h_1(I_1, I_2)$  et  $h_2(I_1, I_2)$  sont appelées fonctions d'amortissements, elles ne dépendent que de la déformation par l'intermédiaire des invariants du tenseur de Cauchy green droit et de Finger et sont comprises entre 0 et 1. Dans le cadre de faibles déformations, lorsqu'on reste proche du domaine linéaire, la fonction d'amortissement est égale à 1. Par contre ces fonctions sont décroissantes dès lors qu'on est en grandes déformations. La

détermination de la fonction d'amortissement a fait l'objet de nombreux travaux résumés par [WAG09] sur les fonctions d'amortissement en rhéologie.

Dans le cadre de notre étude, nous nous baserons sur la fonction analytique d'amortissement proposée par Papanastasiou [PAP83, FUL93]. En effet, cette fonction analytique d'amortissement est valable en cisaillement ainsi qu'en élongation :

$$\begin{aligned} h_1(I_1, I_2) &= \frac{\alpha}{(\alpha-3) + \beta I_1 + (1-\beta) I_2} \\ h_2(I_1, I_2) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Où  $I_1, I_2$  sont respectivement le premier et deuxième invariant du tenseur de Finger  $\underline{\underline{C}}^{-1}$ . Le paramètre  $\alpha$  est déterminé par des expériences en cisaillement alors que le paramètre  $\beta$  est obtenu par des expériences en élongation.

### 3.2.2 Loi viscoélastique de K-BKZ modifiée :

Dans le cadre de nos travaux, nous proposons une loi de comportement basée sur le modèle K-BKZ et qui dépend également d'une nouvelle variable qui est la température du film à l'issue du chauffage IR. Cette modification de la loi de comportement est effectuée en postulant que la fonction mémoire du matériau ne dépend plus uniquement du temps mais également de la température :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t, T) = -p(T)\underline{\underline{I}} + \int_{-\infty}^t M(t-s, T) \left[ h_1(I_1, I_2) \underline{\underline{C}}_t^{-1}(s) + h_2(I_1, I_2) \underline{\underline{C}}_t(s) \right] ds \quad (3.9)$$

Où  $M(t-s, T) = \sum_{i=1}^N \frac{g_i(T)}{\lambda_i(T)} e^{\left(-\frac{t-s}{\lambda_i(T)}\right)}$  est la fonction mémoire du matériau,  $g_i$  et  $\lambda_i$  sont

respectivement le module et le temps de relaxation à la température  $T$ . La thermodépendance de ces coefficients est présentée dans le paragraphe suivant.

### 3.2.3 Modélisation de la thermodépendance (lois de viscosité):

La thermo-dépendance des lois de viscosité est prise en compte par le biais d'un facteur de translation thermique noté  $a_T$ , calculé par un des deux types de lois suivantes (selon le caractère amorphe ou semi-cristallin du polymère considéré).

### 3.2.3.1 La loi WLF

La loi de Williams Landel Ferry, appelée la loi WLF [FER80, BIR87, SCH95] s'applique au cas des polymères amorphes, pour des températures comprises entre  $T_g$  et  $T_g + 100^\circ\text{C}$  :

$$\log(a_T) = -C_1^0 \frac{T - T_0}{C_2^0 + T - T_0} \quad (3.10)$$

$C_1^0$  et  $C_2^0$  sont deux coefficients identifiés expérimentalement suivant la valeur de la température de référence  $T_0$ , souvent choisie comme la température de transition vitreuse  $T_g$ .

On a alors :

$$\log(a_T) = -C_1^g \frac{T - T_g}{C_2^g + T - T_g} \quad (3.11)$$

En notant qu'un changement de température de référence conduit à :

$$C_1^1 = \frac{C_1^0 C_2^0}{C_2^0 + T_1 - T_0} \quad (3.12)$$

$$C_2^1 = C_2^0 + T_1 - T_0 \quad (3.13)$$

### 3.2.3.2 La loi d'Arrhenius

Cette loi [BIR87, LAR01] est utilisée dans le cas des polymères semi-cristallins. Pour des mesures faites à une température supérieure à la température de fusion et donc à une température très supérieure à  $T_g$ . Cela rend la détermination des constantes  $C_1$  et  $C_2$  de l'équation WLF impossible. On utilise donc la relation suivante :

$$\ln(a_T) = \frac{E_a}{R} \left( \frac{T_0 - T}{T T_0} \right) \quad (3.14)$$

Avec :  $E_a$  l'énergie d'activation (unité: kJ/mol) qui est déterminée expérimentalement.

### 3.3 Implémentation des lois de comportement dans le code Plast

Dans le cadre de nos travaux, les lois de comportement sont développées dans le logiciel Plast. Ce code éléments finis initié par M. Brunet, H. Walter et L. Baillet, est développé au LaMCoS depuis plus d'une douzaine d'années. Il est à l'origine développé pour la simulation des matériaux fragiles avec fissuration et la simulation d'impacts. Ce code a ensuite été modifié et développé par notamment N. Hamila et P. Boisse, pour la simulation de la mise en forme des renforts de composite. Un certain nombre d'éléments finis est présent dans le code, avec principalement des éléments rigides pour la modélisation des outils d'emboutissage, des éléments de coque et membrane [HAM07b, HAM09, ALL11] et des éléments 3D [DEL09]. La figure ci-dessous présente différents exemples de simulations réalisées via ce code.

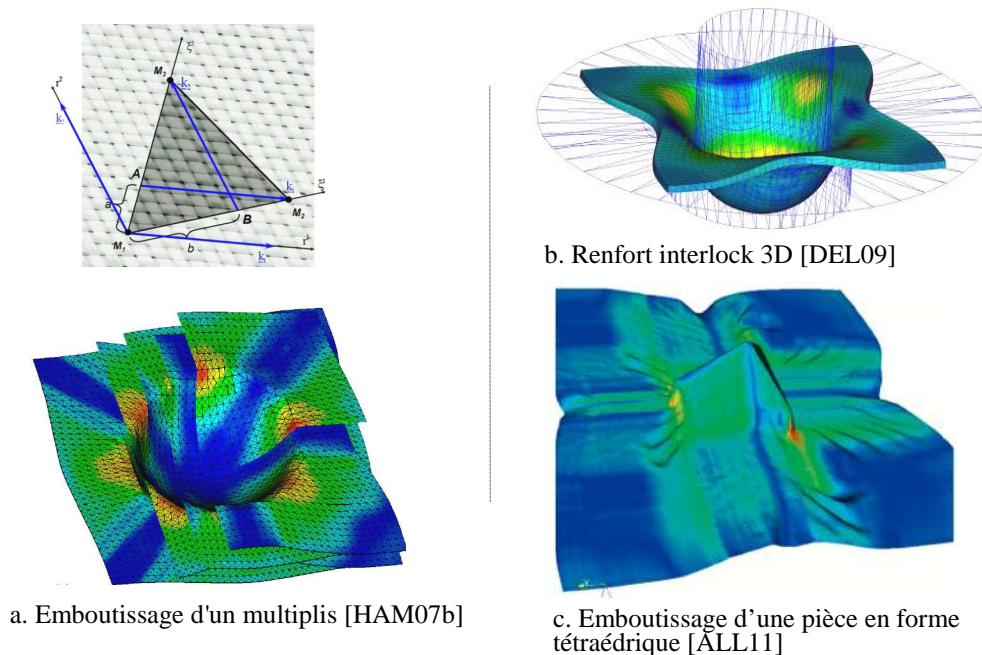


Figure 3-1 Résultats de simulation de mises en forme réalisées avec Plast pour différents renforts

Dans un premiers temps, nous faisons un rappel sur les schémas d'intégration temporels les plus classiques, plus particulièrement sur le schéma explicite en différences centrées, puis la discrétisation élément fini est présentée partie 3.3.2. L'implémentation de la loi de comportement est détaillée en partie 3.3.3.

### 3.3.1 Schémas d'intégration temporelle

#### 3.3.1.1 Cadre général

L'analyse de problèmes dynamiques non linéaires nécessite la mise en place de schémas d'intégration temporels itératifs permettant de résoudre pas à pas les équations de la dynamique :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} = \{f^{ext}\} - \{f^{int}\} \quad (3.15)$$

Où  $u$  est une matrice colonne contenant tous les degrés de liberté du modèle (déplacements des nœuds),  $[M]$  est la matrice de masse diagonalisée (masse lumping) tel que décrit dans [ZIE00],  $[C]$  est la matrice d'amortissement et  $f^{int}$  et  $f^{ext}$  sont des matrices colonnes contenant respectivement les efforts internes et externes aux nœuds.

La résolution de cette équation dans le temps se fait à l'aide d'un *schéma d'intégration temporel*. Le temps est d'abord discrétisé en *incrément*s espacés par un *pas de temps*. L'équation (3.15) discrétisée en temps s'écrit, à l'incrément  $i$  :

$$[M]\{\ddot{u}_n\} + [C]\{\dot{u}_n\} = \{f_n^{ext}\} - \{f_n^{int}\} \quad (3.16)$$

Le schéma d'intégration temporel définit alors la façon dont le déplacement, la vitesse et l'accélération sont calculés à chaque incrément. Le schéma utilisé dans PLAST est un schéma des différences centrées. La description de ce schéma est faite dans [CAR91, HAM07]. C'est un *schéma de Newmark* de type explicite [NEW59, KRE09]. Ce schéma fait intervenir 2 paramètres ( $\beta$  et  $\gamma$ ), dont la valeur permet d'obtenir différents schémas d'intégration (implicites ou explicites), adaptables au problème donné, comme défini dans le tableau 2 [HUG87] :

Méthode	Type	$\beta$	$\gamma$	Stabilité
Différences centrées	Explicite	0	1/2	Conditionnelle
Méthode des trapèzes	Implicite	1/2	1/2	Inconditionnelle
	Implicite	$\beta - \gamma \geq 0$	$\beta \geq 1/2$	Inconditionnelle
	Implicite	$\beta - \gamma < 0$	$\beta \geq 1/2$	Conditionnelle

Tableau 2 Différents schémas d'intégration temporelle

Dans les schémas de Newmark, le déplacement et la vitesse sont d'abord développés en séries de Taylor puis tronqués au jerk avec deux coefficients de pondération sur celui-ci :

$$\begin{aligned}\{u_{n+1}\} &= \{u_n\} + \Delta t \{\dot{u}_n\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{u}_n\} + \beta \Delta t \{\ddot{u}_{n+1}\} \\ \{\dot{u}_{n+1}\} &= \{\dot{u}_n\} + \Delta t \{\ddot{u}_n\} + \gamma \Delta t^2 \{\ddot{u}_{n+1}\}\end{aligned}\quad (3.17)$$

Le schéma explicite aux différences centrées est obtenue en prenant  $\beta = 0$  et  $\gamma = 1/2$  dans les formules de Newmark (3.17) :

$$\begin{aligned}\{u_{n+1}\} &= \{u_n\} + \Delta t \{\dot{u}_n\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{u}_n\} \\ \{\dot{u}_{n+1}\} &= \{\dot{u}_n\} + \frac{\Delta t}{2} (\{\ddot{u}_n\} + \{\ddot{u}_{n+1}\})\end{aligned}\quad (3.18)$$

La mise en oeuvre de l'équation de la dynamique (3.15) est développée ci-dessous. Ainsi, en utilisant les équations (3.18)a et (3.18)b on exprime l'incrément de déplacement au pas  $n+1$  :

$$\begin{aligned}\{\Delta u_{n+1}\} &= \{u_{n+2}\} - \{u_{n+1}\} \\ &= \Delta t \{\dot{u}_{n+1}\} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \{\ddot{u}_{n+1}\} \\ &= \Delta t \{\dot{u}_n\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{u}_n\} + \Delta t^2 \{\ddot{u}_{n+1}\}\end{aligned}\quad (3.19)$$

En inversant cette équation (3.19), on obtient :

$$\{\ddot{u}_{n+1}\} = \frac{1}{\Delta t^2} (\{\Delta u_{n+1}\} - \Delta t \{\dot{u}_n\} - \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{u}_n\}) \quad (3.20)$$

Ainsi en remplaçant (3.20) dans (3.18)b :

$$\{\dot{u}_{n+1}\} = \frac{1}{2\Delta t} (\{\Delta u_{n+1}\} + \Delta t \{\dot{u}_n\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{\ddot{u}_n\}) \quad (3.21)$$

Donc finalement, la vitesse et l'accélération peuvent être exprimées sous la forme :

$$\begin{aligned} \{\ddot{u}_{n+1}\} &= \{\ddot{u}_n\} + \frac{1}{\Delta t^2} \{\Delta u_{n+1}\} \\ \{\dot{u}_{n+1}\} &= \{\dot{u}_n\} + \frac{1}{2\Delta t} \{\Delta u_{n+1}\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Où :

$$\begin{aligned} \{\ddot{u}_n\} &= -\frac{1}{\Delta t} \{\dot{u}_n\} - \frac{1}{2} \{\ddot{u}_n\} \\ \{\dot{u}_n\} &= \frac{1}{2} \{\dot{u}_n\} + \Delta t \frac{1}{4} \{\ddot{u}_n\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ainsi en incorporant les équations (3.22) et (3.23) dans l'équation de la dynamique (3.16) et avec la matrice d'amortissement prise égale à  $\alpha[M]$ , l'incrément de déplacement sera :

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta t \alpha + 1}{\Delta t^2} [M] \{\Delta u_{n+1}\} = \{f_{n+1}^{ext}\} - \{f_{n+1}^{int}\} - \alpha [M] \{\dot{u}_n\} - [M] \{\ddot{u}_n\} \quad (3.24)$$

L'avantage de ce type de schéma est qu'il est nécessaire d'inverser uniquement une matrice de masse afin de résoudre l'équation précédente. L'optimisation du temps de calcul est effectuée par l'utilisation d'une méthode de condensation de matrice [ZIE00], basée sur une approximation diagonale  $[\tilde{M}]$  à la place de la matrice de masse  $[M]$ . On parlera alors de mass lumping.

### 3.3.1.2 Stabilité du schéma

Le schéma est conditionnellement stable pour  $\gamma$  compris entre 0.5 et 1. Cette condition implique que le pas de temps soit inférieur à un pas de temps critique. Il s'agit du critère de stabilité de Courant-Frederick-Lewis [BEL83]. Il est théoriquement défini en effectuant une analyse spectrale de la matrice d'amplification. Pratiquement on le calcul sous la forme suivante :



$$\Delta t < \frac{l_{\min}}{c} \quad (3.25)$$

En notant  $l_{\min}$  le diamètre du cercle inscrit du plus petit élément du maillage et  $c$  la vitesse de l'onde dans l'élément. Donc finalement, plus une structure sera finement maillée, plus le pas de temps critique sera faible et donc le calcul sera plus long.

Enfin notons que le fait de prendre  $\gamma$  plus grand que 0.5 permet d'introduire de l'amortissement numérique qui élimine les hautes fréquences [HUG87], et peut si nécessaire stabiliser de nombreux calculs.

### 3.3.2 Discrétisation élément fini et modélisation des efforts

Dans cette partie, nous présentons la méthode des éléments finis utilisée pour modéliser le thermoformage d'une membrane thermoplastique. La discrétisation spatiale consiste à subdiviser la feuille thermoplastique en éléments finis quadrangulaires ou triangulaires. Le principe des travaux virtuels est écrit pour l'ensemble du domaine.

Dans un premier temps, nous posons les bases de la discrétisation élément fini pour un élément triangulaire à 3 noeuds ainsi qu'un élément quadrangulaire à 4 noeuds. Par exemple, pour un élément triangulaire à 3 noeuds avec un repère isoparamétrique associé (cf Figure 3-2); tout point P appartenant à l'élément peut être exprimé par ses coordonnées  $x^i$  dans l'espace, fonction des coordonnées  $x_T^i$  des noeuds  $T$  de l'élément.

$$\underline{x} = x^i \underline{e}_i = N_T(\xi^1, \xi^2) x_T^i \underline{e}_i \quad (3.26)$$

Les fonctions de forme d'un élément fini triangulaire sont :

$$\{N_T\} = \begin{Bmatrix} N_1(\xi^1, \xi^2) \\ N_2(\xi^1, \xi^2) \\ N_3(\xi^1, \xi^2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \xi^1 - \xi^2 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \xi^1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \xi^2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Ainsi, les dérivées des fonctions de forme par rapport au paramétrage sont notées :

$$\left\langle \frac{\partial N_T}{\partial \xi^1} \right\rangle = \langle -1 \ 1 \ 0 \rangle \quad (3.28)$$

$$\left\langle \frac{\partial N_T}{\partial \xi^2} \right\rangle = \langle -1 \ 0 \ 1 \rangle \quad (3.29)$$

Pour un élément quadrangle à quatre noeuds avec un repère isoparamétrique associé (Figure 3-2). Les fonctions de forme de l'élément ainsi que leurs dérivées par rapport à leurs paramètres sont notées :

$$\{N_e\} = \begin{Bmatrix} N_1(\xi^1, \xi^2) \\ N_2(\xi^1, \xi^2) \\ N_3(\xi^1, \xi^2) \\ N_4(\xi^1, \xi^2) \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 - \xi^1 - \xi^2 + \xi^1 \xi^2 \\ 1 + \xi^1 - \xi^2 - \xi^1 \xi^2 \\ 1 + \xi^1 + \xi^2 + \xi^1 \xi^2 \\ 1 - \xi^1 + \xi^2 - \xi^1 \xi^2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \xi^1 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} + \xi^2 \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \xi^1 \xi^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \right) \quad (3.30)$$

$$\left\langle \frac{\partial N_e}{\partial \xi^1} \right\rangle = \frac{1}{4} \langle -1 \ 1 \ 1 \ -1 \rangle + \frac{1}{4} \xi^2 \langle 1 \ -1 \ 1 \ -1 \rangle \quad (3.31)$$

$$\left\langle \frac{\partial N_e}{\partial \xi^2} \right\rangle = \frac{1}{4} \langle -1 \ -1 \ 1 \ 1 \rangle + \frac{1}{4} \xi^1 \langle 1 \ -1 \ 1 \ -1 \rangle \quad (3.32)$$

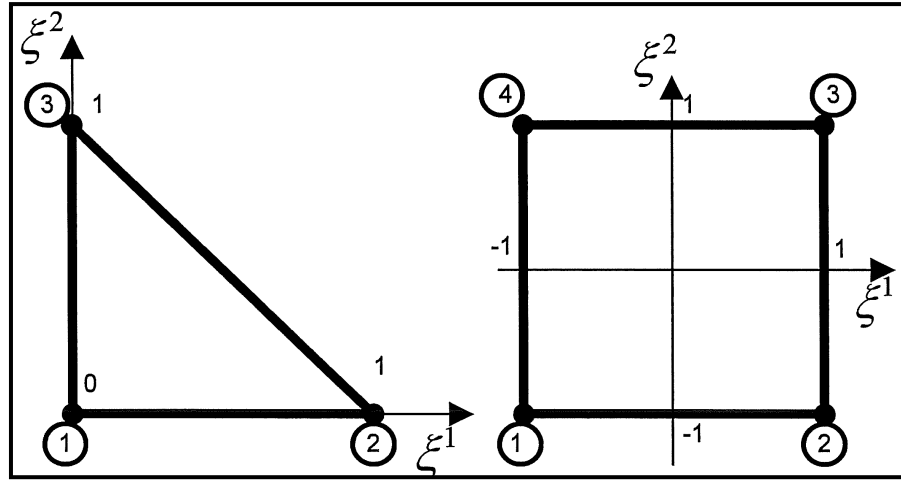


Figure 3-2 Repères isoparamétrique et numérotation de l'élément triangle et de l'élément quadrangle

Ainsi, en utilisant une approche en dynamique explicite (cf 3.3.1), et une fois écarté le problème de l'inversion de la matrice de masse, toute la difficulté de la résolution de l'équation de la dynamique réside dans la détermination du vecteur des forces internes  $\{f_n^{int}\}$ .

Ainsi on identifie les  $N_{el}$  éléments (ou sous-domaines)  $\Omega_e$  qui pavent l'espace  $\Omega$  du solide:

$$\Omega = \sum_{e=1}^{N_{el}} \Omega_e \quad (3.33)$$

Le vecteur des forces internes  $f_e^{\text{int}}(t)$  associé à l'élément  $\Omega_e$  s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} f_e^{\text{int}}(t) &= \int_{\Omega_e} B_e^T \sigma(t) dV \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n_{\text{Gauss}}} B_e^T(x_i) \sigma_i(t) W_i j_i \end{aligned} \quad (3.34)$$

Où  $B_e$  la matrice d'interpolation isoparamétrique,  $j_i$  et  $W_i$  respectivement la jacobienne de la transformation et le poids d'intégration au point de gauss  $x_i$  (point d'intégration), avec  $i=1, 2, \dots, n_{\text{Gauss}}$ , et finalement  $\sigma_i(t)$  la réponse en contrainte calculée au point d'intégration  $x_i$ . Les détails de l'implémentation de la subroutine Fortran sont présentés dans la partie suivante.

### 3.3.3 Implémentation et discrétisation de la loi de comportement viscoélastique dans Plast

L'implémentation d'une loi de comportement dans PLAST se fait par l'intermédiaire d'une *subroutine* écrite en FORTRAN, qui permet de déterminer les contraintes dans le matériau en fonction de la transformation qui lui est imposée. Après une présentation des différentes étapes de l'implémentation de la *subroutine*, la méthodologie adoptée pour la résolution de l'intégration associée à notre loi de comportement ainsi que la discrétisation de celle-ci seront présentées.

#### 3.3.3.1 Ecriture de la loi de comportement

Dans le cadre d'une approche éléments-finis, il est nécessaire de définir une base matérielle locale. Une base privilégiée, couramment utilisée dans la méthode des éléments finis est la base des vecteurs covariant  $\underline{g}_i$  de l'élément qui est fixée à la matière :

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi_i}, \text{ Avec } \underline{x} \text{ le vecteur position d'un point de l'élément et } \xi_i \text{ les coordonnées de ce}$$

point dans le repère isoparamétrique de l'élément fini.

La base duale contravariante se définit de telle sorte que  $\underline{g}_i \cdot \underline{g}^j = \delta_i^j$  ( $\delta_i^j$  symbole de

Kronecker), alors :  $\underline{g}^i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} \underline{e}_j \quad i \in [1, 2], j \in [1, 3]$

Ainsi, nous calculons initialement le tenseur gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$  des éléments :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{g}_i \otimes \underline{G}^i \quad (3.35)$$

Avec  $\underline{g}_i$  les vecteurs covariants à l'état actuel et  $\underline{G}^i$  les vecteurs contravariants à l'état initial. Ce tenseur est fourni en entrée de la subroutine Fortran. Ainsi, le tenseur de Cauchy-Green droit peut être exprimé par la relation suivante :

$$[\underline{\underline{C}}] = [\underline{\underline{F}}]^T \cdot [\underline{\underline{F}}] \quad (3.36)$$

Dans le cadre de nos travaux, nous considérons les hypothèses d'incompressibilité et des contraintes planes pour la membrane polymère, ce qui permet d'écrire les propriétés suivantes pour les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.37)$$

Nous rappelons que dans notre loi viscoélastique non-isotherme, le tenseur des contraintes de Cauchy est relié à l'historique du tenseur gradient des déformations :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = -p(T)\underline{\underline{I}} + \int_{-\infty}^t M(t-s, T) \left[ h_1(I_1, I_2) \underline{\underline{C}}_t^{-1}(s) + h_2(I_1, I_2) \underline{\underline{C}}_t(s) \right] ds \quad (3.38)$$

Cependant pour calculer ce tenseur des contraintes, il est primordial de calculer la pression hydrostatique. Cette pression est calculée par la relation ci-dessous en se basant sur l'hypothèse des contraintes planes et d'incompressibilité du matériau :

$$p(t, T) = \int_{-\infty}^t M(t-s, T) \left[ h_1(I_1, I_2) C_{zz}^{-1}(s) + h_2(I_1, I_2) C_{zz}(s) \right] ds \quad (3.39)$$

En utilisant l'équation précédente et les formules d'amortissement (eq. 3.8), le tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(t) = & - \int_{-\infty}^t M(t-s, T) \left[ h_1(I_1, I_2) C_{zz}^{-1}(s) \right] ds \cdot \underline{\underline{I}} \\ & + \int_{-\infty}^t M(t-s, T) \left[ h_1(I_1, I_2) \underline{\underline{C}}_t^{-1}(s) \right] ds \end{aligned} \quad (3.40)$$

Il est donc possible à ce stade de présenter les détails de la stratégie adoptée pour l'implémentation de l'algorithme d'intégration.

### 3.3.3.2 Mise en œuvre de la méthode numérique adoptée

Le problème d'intégration dans le temps associé à notre loi de comportement est résolu en se basant sur [SIM87b, ZIE89]. Nous avons décrit précédemment que le calcul de la pression hydrostatique s'écrit :

$$p(t, T) = \int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^N \frac{g_i(T)}{\lambda_i(T)} e^{\left(-\frac{t-s}{\lambda_i(T)}\right)} h(I) C^{-1}_{zz}(t, s) ds \quad (3.41)$$

Or, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\tau_i} \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) h(I) C^{-1}_{zz}(t, s) \right] &= \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\tau_i^2} \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) h(I) C^{-1}_{zz}(t, s) \\ &+ \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\tau_i} \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) h(I) \frac{d}{ds} C^{-1}_{zz}(t, s) \end{aligned} \quad (3.42)$$

De plus, nous obtenons en multipliant les deux membres de l'équation (3.42) par  $\tau_i$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[ g_i \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) h(I) C^{-1}_{zz}(t, s) \right] &= \frac{g_i}{\tau_i} \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) h(I) C^{-1}_{zz}(t, s) \\ &+ g_i \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) h(I) \frac{d}{ds} C^{-1}_{zz}(t, s) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ainsi en utilisant l'expression précédente, la pression hydrostatique peut être formulée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
p(T, t) &= \int_{-\infty}^t \frac{d}{ds} \left[ \sum_{i=1}^N g_i \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \cdot h(I) \cdot C^{-1}_{zz}(t, s) \right] ds - \int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^N g_i \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \cdot h(I) \cdot \frac{d}{ds} C^{-1}_{zz}(t, s) ds \\
&= \left[ \sum_{i=1}^N g_i \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \cdot h(I) \cdot C^{-1}_{zz}(t, s) \right]_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^N g_i \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \cdot h(I) \cdot \frac{d}{ds} C^{-1}_{zz}(t, s) ds \\
&= \left[ \sum_{i=1}^N g_i C^{-1}_{zz}(t, s) \cdot h(I) - 0 \right] - \int_{-\infty}^t g_i \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \cdot h(I) \cdot \frac{d}{ds} C^{-1}_{zz}(t, s) ds \\
&= \sum_{i=1}^N g_i h(I) C^{-1}_{zz}(t, s) - f_1(T, t)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Avec :

$$f_1(T, t) = \int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^N g_i \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \cdot h(I) \cdot \frac{d}{ds} C^{-1}_{zz}(t, s) ds \tag{3.45}$$

Finalement, la pression hydrostatique peut s'écrire :

$$p(T, t) = \sum_{i=1}^N g_i h_1(I_1, I_2) C^{-1}_{zz}(t, s) - \int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^N g_i \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) \cdot h(I) \cdot \frac{d}{ds} C^{-1}_{zz}(t, s) ds \tag{3.46}$$

La méthode adoptée pour la discrétisation de l'équation (3.46) est développée ci-dessous. Ainsi on exprime l'incrément de la pression au pas  $n+1$  :

Avec :

$$t_{n+1} = \Delta t_n + t_n \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= \sum_{i=1}^N g_i h(I) C^{-1}_{zz}(t_{n+1}) - \int_{-\infty}^{t_{n+1}} \sum_{i=1}^N g_i h(I) \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t_n - s}{\tau_i}\right) \cdot \frac{d}{ds} C^{-1}_{zz}(s) ds \\
&= \sum_{i=1}^N g_i h(I) C^{-1}_{zz}(t_{n+1}) - \sum_{i=1}^N g_i \exp\left(\frac{-\Delta t_n}{\tau_i}\right) \int_{-\infty}^{t_n} h(I) \exp\left(-\frac{t_n - s}{\tau_i}\right) \cdot \frac{d}{ds} C^{-1}_{zz}(s) ds \\
&\quad - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=1}^N g_i \cdot h(I) \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t_n - s}{\tau_i}\right) \cdot \frac{d}{ds} C^{-1}_{zz}(s) ds \\
&= \sum_{i=1}^N g_i h(I) C^{-1}_{zz}(t_{n+1}) - \exp\left(\frac{-\Delta t_n}{\tau_i}\right) f_1(T, t_n) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=1}^N g_i \cdot h(I) \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t_n - \tau}{\tau_i}\right) \cdot \frac{d}{ds} C^{-1}_{zz}(s) ds
\end{aligned} \tag{3.48}$$

En utilisant la méthode des différences centrées et en se positionnant en  $s = \frac{t_n + \Delta t_n}{2}$ , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=1}^N g_i \cdot h(I) \cdot \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t_n - s}{\tau_i}\right) \cdot \frac{d}{ds} C_{zz}^{-1}(s) ds &= \sum_{i=1}^N g_i \cdot h(I) \cdot \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{2\tau_i}\right) \cdot \Delta t_n \frac{d}{ds} C_{zz}^{-1}\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^N g_i \cdot h(I) \cdot \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{2\tau_i}\right) \cdot \left[ C_{zz}^{-1}(t_{n+1}) - C_{zz}^{-1}(t_n) \right]
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Ainsi en remplaçant (3.45) dans (3.49) :

$$f_1(t_{n+1}) = \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_i}\right) \cdot f_1(t_n) + g_i \cdot h(I) \cdot \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{2\tau_i}\right) \cdot \left[ C_{zz}^{-1}(t_{n+1}) - C_{zz}^{-1}(t_n) \right] \tag{3.50}$$

Finalement la pression peut être exprimée sous la forme suivante:

$$p(T, t_{n+1}) = \sum_{i=1}^N g_i \cdot h(I) \cdot C_{zz}^{-1}(t_{n+1}) - f_1(t_{n+1}) \tag{3.51}$$

Il est possible après ce stade, de calculer le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\underline{\underline{\sigma}}(T, t) = -p(T, t) \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{H}}_{visc}(T, t) \tag{3.52}$$

Avec :

$$\underline{\underline{H}}_{visc}(T, t) = \int_{-\infty}^t \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\tau_i} \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_i}\right) h(I) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1}(t, s) ds \tag{3.53}$$

Donc en utilisant le même algorithme de récurrence, nous avons :

$$\underline{\underline{H}}_{visc}(t_{n+1}) = \sum_{i=1}^N g_i \cdot h(I) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1}(t_{n+1}) - \underline{\underline{f}}_2(t_{n+1}) \tag{3.54}$$

Avec  $\underline{\underline{f}}_2(t_{n+1})$  exprimée par la relation suivante :

$$\underline{\underline{f}}_2(t_{n+1}) = \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{\tau_i}\right) \cdot \underline{\underline{f}}_2(t_n) + g_i \cdot h(I) \cdot \exp\left(-\frac{\Delta t_n}{2\tau_i}\right) \cdot \left[ \underline{\underline{C}}^{-1}(t_{n+1}) - \underline{\underline{C}}^{-1}(t_n) \right] \tag{3.55}$$

Ainsi en incorporant les équations (3.51) et (3.54) dans l'équation de la contrainte (3.52), l'incrément de contrainte sera :

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}}(n+1) = -p(n+1) \underline{\underline{I}} + \sum_{i=1}^N g_i \cdot h(I) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1}(n+1) - \underline{\underline{f}}_2(n+1)} \tag{3.56}$$

Dans la formule (3.56), toutes les grandeurs du terme de droite sont connues. La structure de la subroutine Fortran, résultant des équations précédentes, est décrite sur la Figure 3-3.

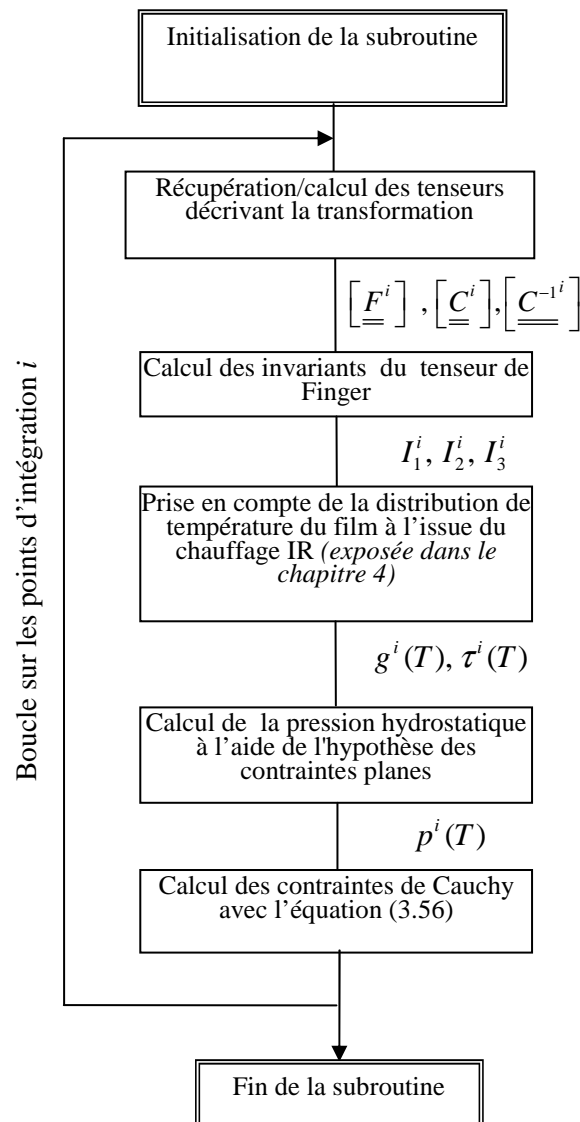


Figure 3-3 Structure de la subroutine Fortran

### 3.4 Identification des paramètres constitutifs de la loi de comportement

Afin d'identifier les paramètres constitutifs de la loi de comportement, nous nous appuyons sur des résultats d'essais réalisés par A. Thevenon durant ses travaux de thèse [THE12]. Ces essais ont été réalisés afin de caractériser mécaniquement et thermomécaniquement les films amorphes étudiés. Ces informations sont indispensables, d'une part, pour la modélisation du



comportement thermomécanique des films polymères utilisés et, d'autre part, pour l'ajustement des paramètres thermiques des procédés de déformation des films qui jouent un rôle non négligeable sur la qualité esthétique des pièces obtenues.

Enfin notons que ces divers essais résumés ci-dessous, sont présentés pour deux types de polymères amorphes. Le premier film est un PS (Polystyrène) d'épaisseur  $100\ \mu\text{m}$ , nommé commercialement "Univeder 4805 AS STD" et, le deuxième est un PC (Polycarbonate) d'épaisseur  $375\ \mu\text{m}$ , dont le nom commercial est "Lexan".

### 3.4.1 Caractérisation mécanique à température ambiante

Les propriétés mécaniques ont été caractérisées grâce à une machine de traction MTS QT25. Les essais ont été effectués pour une vitesse de traverse (vitesse de traction) égale à  $20\text{ mm}\cdot\text{min}^{-1}$  et à température ambiante. Ainsi grâce à ces tests, le module d'Young, les déformations à rupture ainsi que la contrainte au seuil d'écoulement ont été déterminés. Les résultats expérimentaux obtenus pour le film PS et le film PC sont présentés sur la Figure 3-4 [THE12].

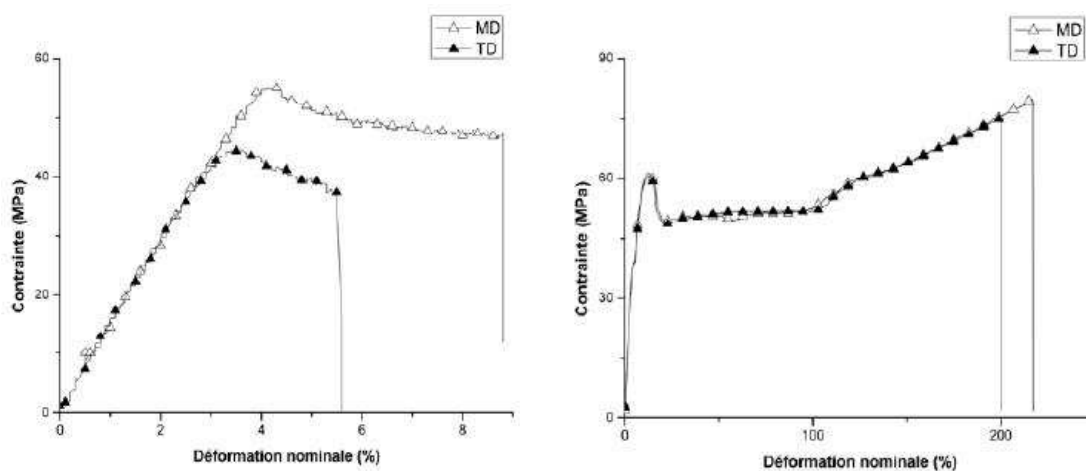


Figure 3-4 Courbe de traction à température ambiante pour le film PS (a) et le film PC (b)

Nous constatons que le comportement mécanique des films est similaire pour une déformation en direction machine (MD) ou dans la direction transverse (TD). Ainsi les modules de Young mesurés expérimentalement pour le film PS sont à  $1470 \pm 50\text{ MPa}$  dans la direction machine et à  $1590 \pm 10\text{ MPa}$  dans la direction transverse. Pour le film PC, les modules de Young mesurés sont de  $1120 \pm 10\text{ MPa}$  pour la direction MD et  $1120 \pm 20\text{ MPa}$  pour la direction TD. Cependant ce film présente une zone de déformation plastique beaucoup

plus importante que dans le cas du film PS. Enfin notons que les deux films sont déformés à l'état vitreux.

### 3.4.2 Caractérisation mécanique en Analyse mécanique dynamique (DMA)

Dans les procédés de transformation industrielle telle que le procédé de thermoformage, les films sont déformés à l'état caoutchoutique, or les tests en traction permettent de caractériser les propriétés mécaniques des films à température ambiante. Ainsi il est nécessaire d'étudier leur comportement mécanique en fonction de la température. Pour cela des essais en tension en DMA (*Dynamic Mechanical Analysis*) sont réalisés pour l'étude et la caractérisation des propriétés mécaniques et thermiques du matériau viscoélastique. Ainsi grâce à ces tests, le module élastique  $E'$  et le module visqueux  $E''$  (cf Figure 3-5), ainsi que le facteur d'amortissement ont été déterminés. Le film est soumis à une rampe de température de  $3^{\circ}\text{C}/\text{min}$  de  $40^{\circ}\text{C}$  jusqu'à  $30^{\circ}\text{C}$  au-dessus de la température de transition vitreuse avec un balayage en fréquence (1 à 50 Hz). L'amplitude de cette déformation est fixée à  $1\ \mu\text{m}$ . La Figure 3-5 présente les résultats expérimentaux obtenus pour le film PS à 1HZ.

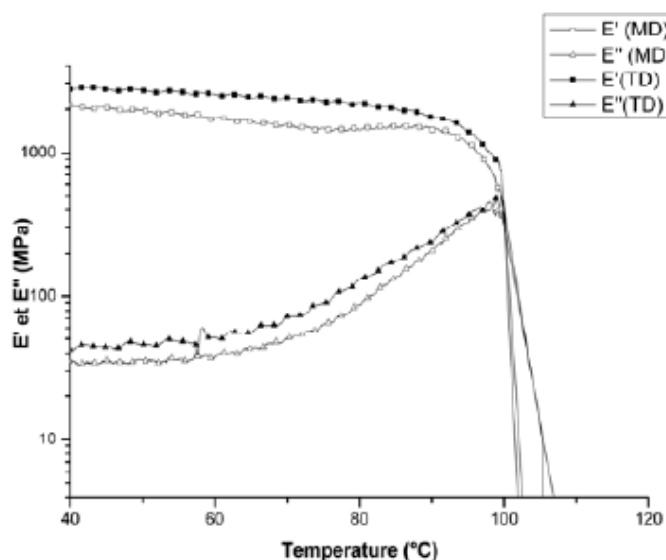


Figure 3-5 Courbe DMA du film PS soumis à une rampe de température [THE12].

Nous constatons que le comportement mécanique de ce polymère est similaire dans les deux directions de sollicitation. Ce résultat confirme celui obtenu en traction à température ambiante. Notons également que le module  $E''$  augmente constamment avec la température montrant une évolution d'un matériau "élastique" vers un matériau "visqueux" avec la température jusqu'à atteindre un pic vers  $100^{\circ}\text{C}$ . Cette température correspond au passage

d'une sollicitation mécanique du matériau à l'état vitreux à une déformation de ce dernier à l'état caoutchoutique. Cette information est importante pour ajuster la température de déformation dans des procédés tels que le thermoformage.

Pour le film PC nous retrouvons des résultats similaires au film PS. Ainsi le comportement thermomécanique du film PC est analogue dans les deux directions de sollicitation comme indiqué dans la Figure 3-6 :

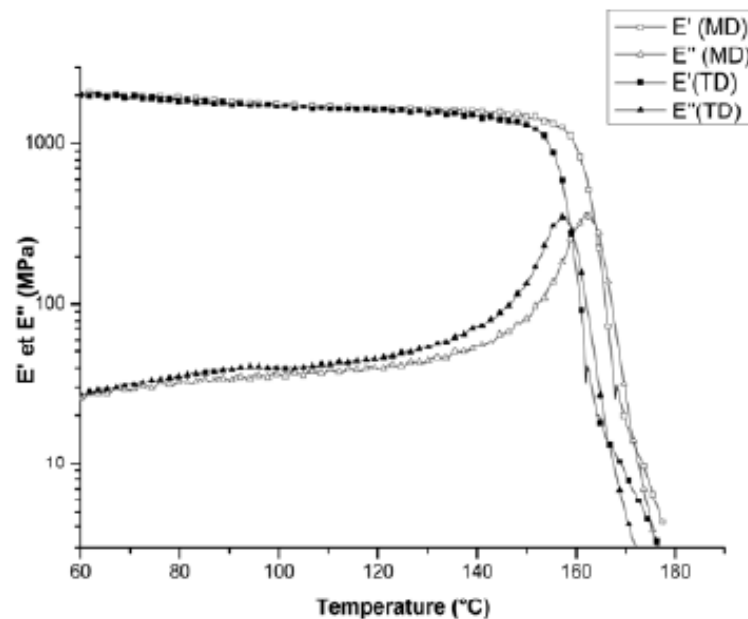


Figure 3-6 Courbe DMA du film PC soumis à une rampe de température.

Enfin notons que la technique DMA permet donc de caractériser finement un échantillon de matériau viscoélastique. Cette technique représente un outil d'évaluation bien adapté aux polymères.

### 3.4.3 Caractérisation thermique

Les propriétés thermiques des matériaux ont été réalisées grâce à une technique calorimétrique différentielle. Le principe de ces techniques [ACC92, TEY96] repose sur la mesure des *variations d'énergie thermique* fournie à l'échantillon à analyser, par rapport à un corps inerte appelé témoin, nécessaires pour imposer un programme de température contrôlé. Il est donc nécessaire de disposer de deux enceintes identiques réglées en température, contenant l'échantillon à analyser et le témoin. La technique utilisée et la plus courante, pour la caractérisation thermique des polymères, est l'*Analyse Enthalpique Différentielle* (appelé

DSC de l'anglais *Differential Scanning Calorimetry*). Elle permet une analyse quantitative des transitions en termes énergétiques. On mesure alors le gradient de puissance électrique nécessaire pour maintenir l'échantillon et le témoin à une température identique, variant linéairement en fonction du temps. Cette technique d'analyse thermique permet également de déterminer les transitions de phase telle que la température de transition vitreuse pour les polymères amorphes ou la température de fusion et de cristallisation pour les semi-cristallins. Ainsi, afin d'effacer l'histoire thermique du matériau amorphe, un premier balayage est effectué jusqu'à une température supérieure à celle de la température de transition vitreuse du matériau. Puis un refroidissement à 10°C/min est effectué jusqu'à la température ambiante. Enfin une deuxième montée est finalement réalisée. Notons que pour l'ensemble des caractérisations thermiques, la vitesse de rampe en température a été fixée à 10°C/min. La Figure 3-7 illustre les courbes DSC des deux films étudiés :

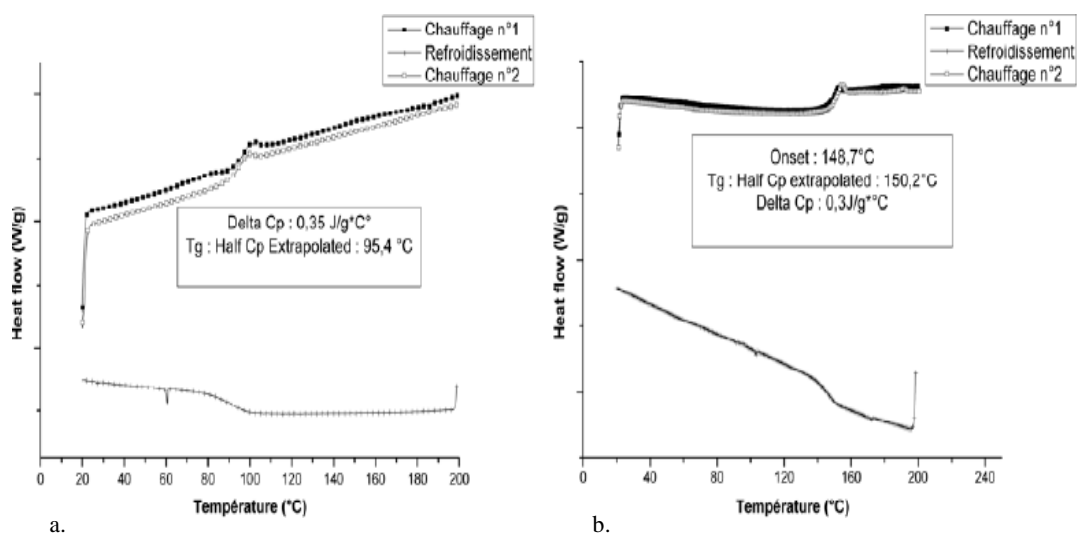


Figure 3-7 Courbe DSC du film PS (a) et du film PC (b) [THE12].

La courbe DSC du film PS (Figure 3-7a) montre que la température de transition vitreuse est autour de 100°C. Pour le film amorphe PC (Figure 3-7b), la température de transition vitreuse est située vers 150°C. Notons également que ces films comme attendu ne présente pas de pic de fusion.

#### 3.4.4 Caractérisation rhéologique et identification des paramètres de la loi de viscosité

L'identification du spectre de temps de relaxation et de la dépendance en température de la viscosité limite (présentée dans le paragraphe 3.2.2) s'effectue grâce à différentes expériences

en rhéologie en cisaillement et pour des températures supérieures à la température de transition vitreuse pour les films polymères. Un rhéomètre à contrainte imposée (voir Figure 3-8) est utilisé pour réaliser ces expériences avec une géométrie plan-plan. La fréquence de travail se situe entre 0.01 et 100 rad/s.



Figure 3-8 Rhéomètre à contrainte imposée

Les courbes  $G'$  ou  $E'$  (module élastique ou appelé module de conservation) obtenues pour différentes températures servent à la construction d'une courbe maîtresse grâce au principe d'équivalence temps-température [FER80]. Ce principe se traduit par la possibilité de superposer les courbes à différentes températures  $T$  sur une des courbes choisie comme référence (température de référence  $T_{ref}$ ) par une translation horizontale d'un facteur  $\lg a_T$  (cf Figure 3-9). Cela correspond à un changement d'échelle de temps ou de fréquence pour chaque température.

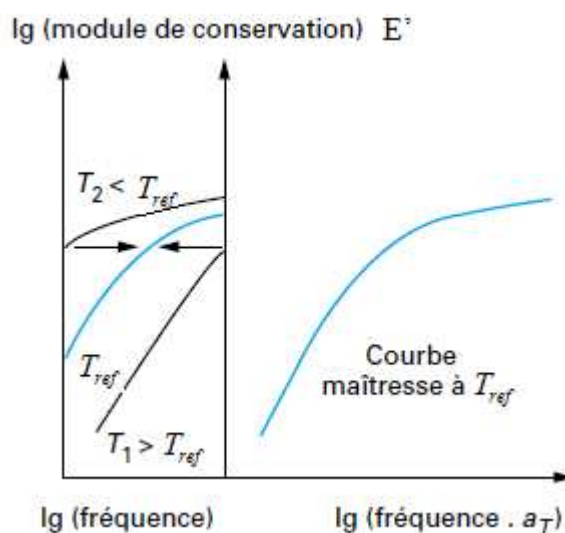


Figure 3-9 Variation du module élastique d'un polymère – application de la superposition temps-température [CAR99]

Ce facteur  $a_T$  est appelé facteur de translation thermique, il dépend seulement de la température  $T$  et de la température de référence  $T_{ref}$  (cf paragraphe 3.2.3).

Ainsi pour le film PS, cette courbe maîtresse obtenue dans une gamme de température entre 110°C et 220°C (Figure 3-10) couvre le plateau caoutchoutique ainsi que le début de la zone de transition vitreuse.

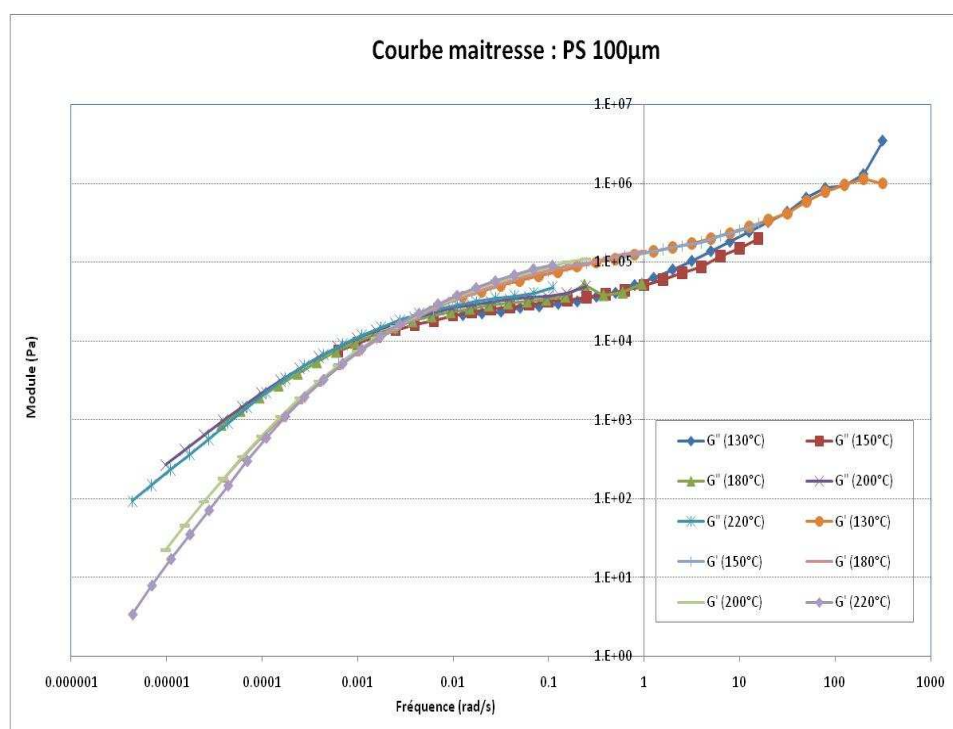


Figure 3-10 Courbe maîtresse du film PS avec une température de référence de 130°C.

Notons que les facteurs de translations expérimentaux ont permis de calculer les paramètres de la loi de viscosité de type WLF :

Température	$C_1$	$C_2$
130°C	10.50	51.55

Tableau 3 Paramètres  $C_1$  et  $C_2$  pour le film PS

En déterminant ainsi  $C_1$  et  $C_2$  et un spectre de temps de relaxation à une température donnée, on est capable de déterminer ce spectre pour n'importe quelle autre température à l'aide de la formule suivante :

$$\lambda(T) = a_T \lambda(T_{ref}) \quad (3.57)$$

Pour le film PC (cf Figure 3-11) la superposition a été réalisée pour une gamme de température comprise entre 160°C et 260°C. La loi WLF permet de calculer les paramètres  $C_1$  et  $C_2$ , ainsi que  $C_1^g$  et  $C_2^g$  à partir des facteurs de translations expérimentaux.

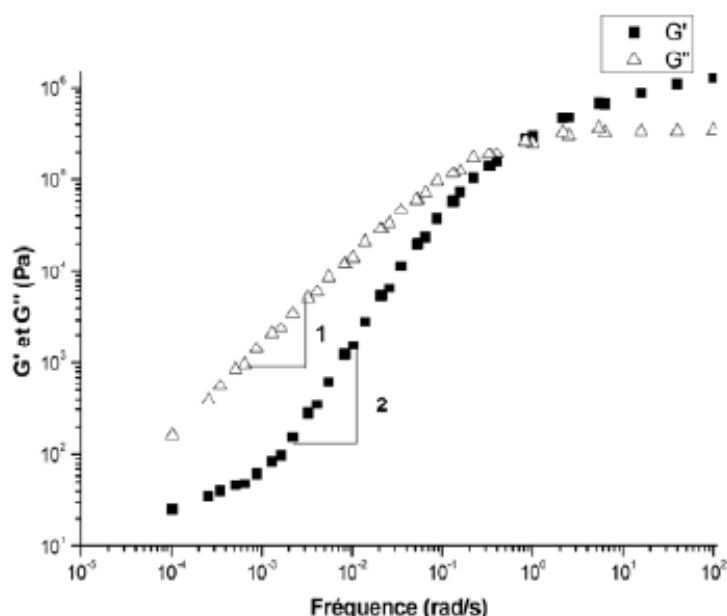


Figure 3-11 Courbe maitresse du film PC avec une température de référence de 180°C [THE12].

Température	$C_1$	$C_2$
180°C	6.37	81.67
150°C (Tg)	10.07	51.67

Tableau 4 Paramètres  $C_1$  et  $C_2$  pour le film PC.

### 3.5 Validation de la loi de comportement

Pour valider l'implémentation de la loi de comportement dans le code de calcul Plast/Explicit avec la méthodologie définie précédemment (3.3.3), nous procédons à une série de tests élémentaires réalisés sur un élément quadrangulaire à quatre noeuds et quatre points d'intégration (Figure 3-12) :

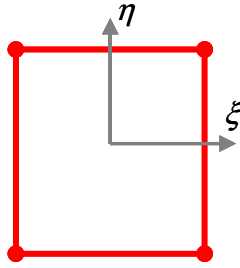


Figure 3-12 Elément de référence

Différents tests, correspondant à chacun des modes de déformation (traction, cisaillement simple, test en cisaillement oscillant, test en relaxation), sont mis en œuvre pour vérifier l'implémentation de la subroutine. Au cours de ces tests, les contraintes caractéristiques obtenues par simulation sont comparées aux contraintes théoriques.

### 3.5.1 Test de cisaillement simple

Dans ce test, la cinématique imposée à l'élément est un déplacement imposé. Les nœuds 1 et 2 sont encastres tandis que les nœuds 3 et 4 sont asservis en déplacement. Notons également que les nœuds 3 et 4 sont bloqués en translation suivant la direction Y.

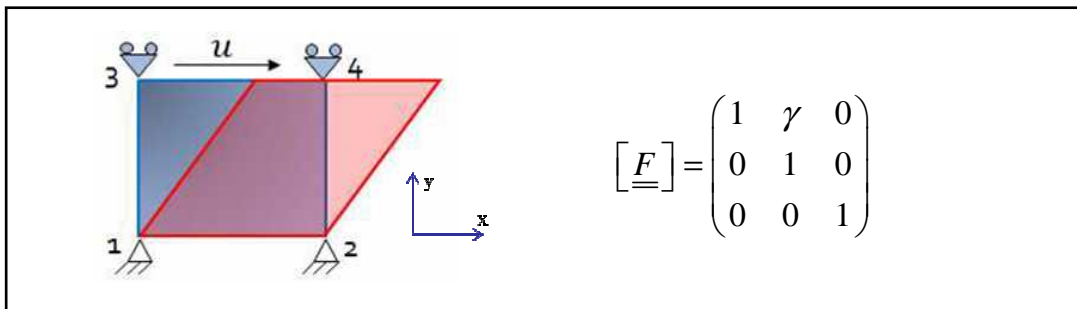


Figure 3-13 Test de cisaillement simple

La validation est effectuée par comparaison des composantes du tenseur des contraintes de Cauchy obtenues par le calcul élément fini et des contraintes de Cauchy obtenues analytiquement. L'erreur calculée est de l'ordre de  $10^{-7}$  % et donc négligeable.



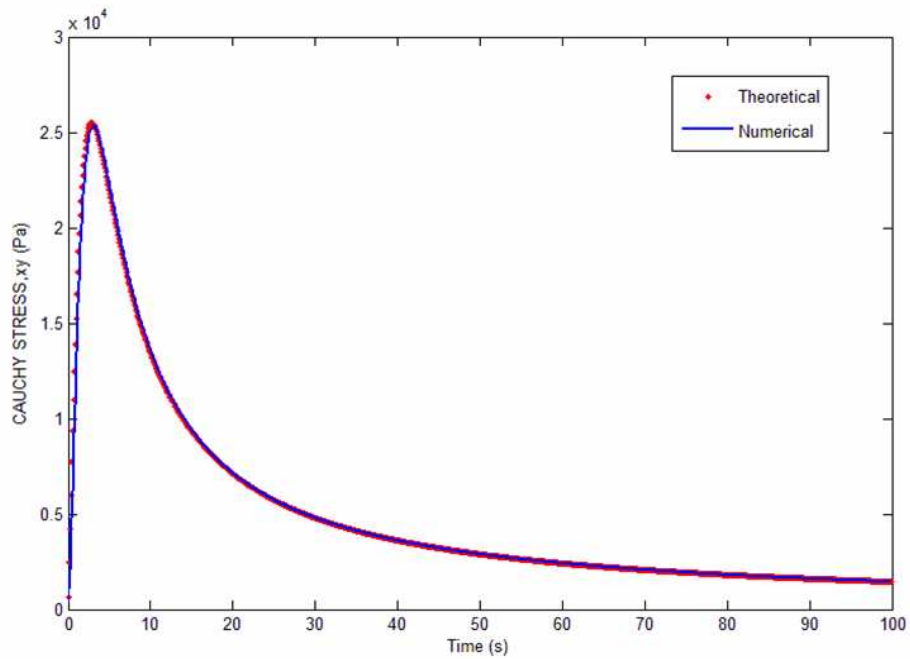


Figure 3-14 Validation de test de cisaillement (comparaison numérique et analytique de la composante  $\sigma_{xy}$  du tenseur des contraintes de Cauchy)

### 3.5.2 Test de traction

Dans ce test, la cinématique imposée à l'élément est un déplacement imposé. Les nœuds 1 et 3 sont encastrés tandis que les noeuds 2 et 4 sont asservis en déplacement suivant la direction X.

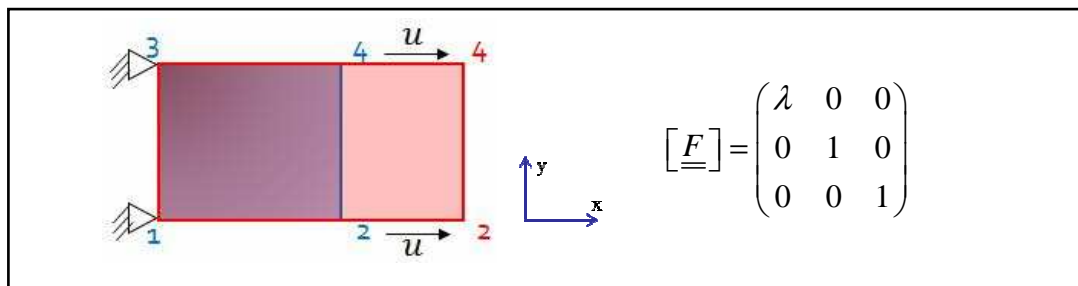


Figure 3-15 Test de traction

La validation est effectuée par comparaison de la composante  $\sigma_{xx}$  du tenseur des contraintes de Cauchy obtenue par le calcul élément fini avec celle obtenue analytiquement.

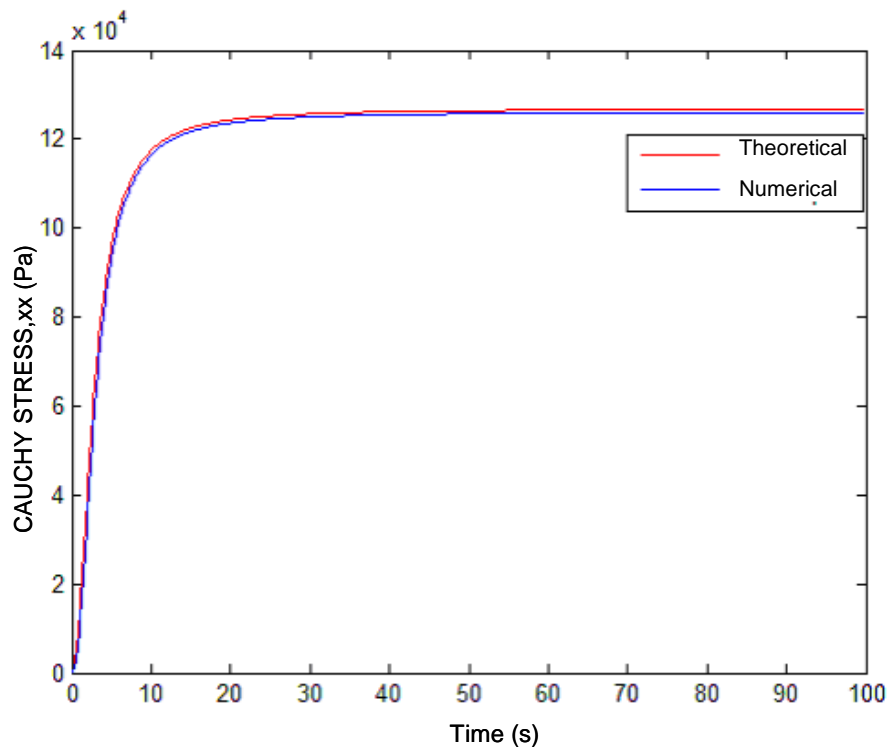


Figure 3-16 Validation de test de traction

La Figure 3-16 montre que la solution numérique donne une bonne précision. En effet, l'erreur calculée par différence des deux contraintes est de l'ordre de  $10^{-5} \%$ . Ainsi cette erreur est acceptable.

Au cours de ce test, l'hypothèse de contraintes plane est également vérifiée. Ainsi les valeurs des contraintes de Cauchy calculées suivant la direction de l'épaisseur du matériau ( $\sigma_{zz}$ ) sont tracées. La courbe Figure 3-17 montre que les valeurs des contraintes  $\sigma_{zz}$  sont de l'ordre de  $10^{-11}$  et donc négligeables. Ainsi la contrainte  $\sigma_{zz}$  reste bien nulle tout le long du calcul.

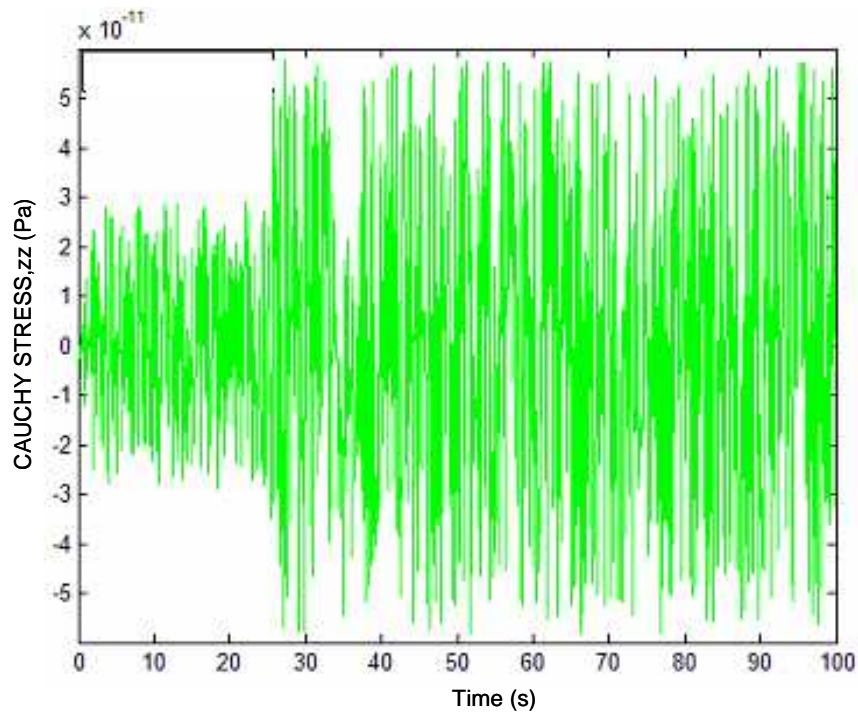


Figure 3-17 Vérification de l'hypothèse d'incompressibilité du matériau

### 3.5.3 Test en cisaillement oscillant

Dans ce test, la cinématique imposée à l'élément est un déplacement de type sinusoïdal avec  $\gamma(t) = \gamma_0 \sin(\omega t)$  (Figure 3-18). Ainsi les noeuds 1 et 2 sont encastres tandis que les noeuds 3 et 4 sont asservies en déplacement. Notons également que les noeuds 3 et 4 sont bloqués en translation suivant la direction Y.

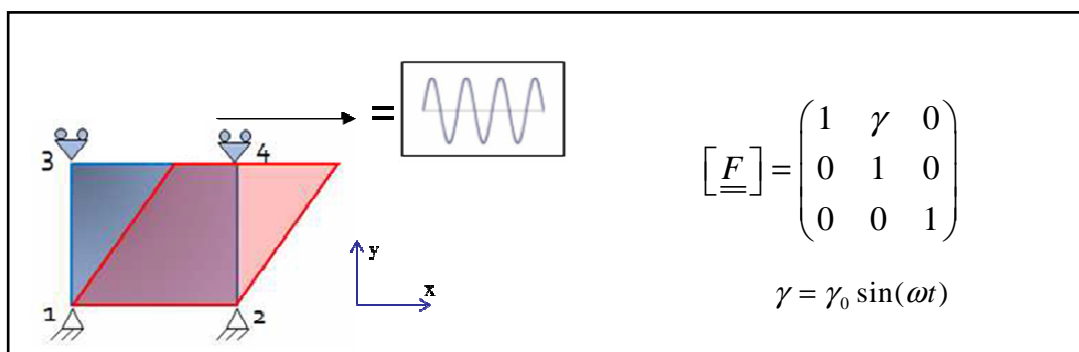


Figure 3-18 Test de cisaillement oscillant

Les résultats obtenus Figure 3-19 montrent bien la concordance entre la valeur obtenue d'une manière théorique et par le calcul numérique.

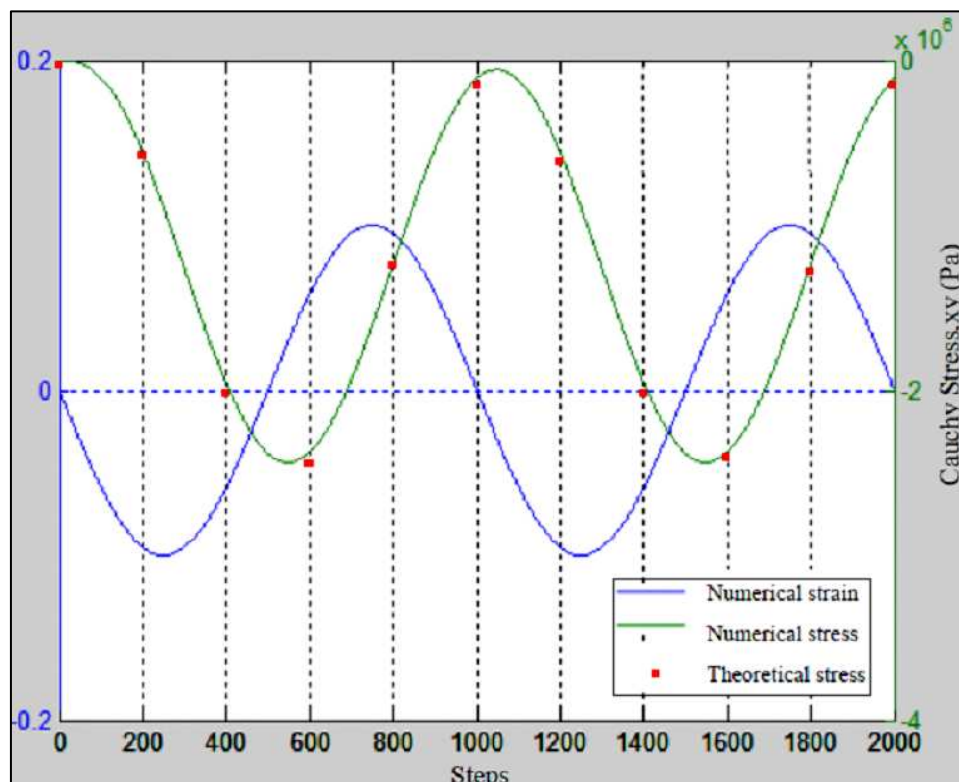


Figure 3-19 Validation de test en cisaillement oscillant (Composante  $\sigma_{xy}$  du tenseur des contraintes de Cauchy )

Nous remarquons que la réponse en contrainte est un sinusoïdale déphasé par rapport à la déformation. Ce déphasage est déterminé en rhéologie des polymères, il permet d'identifier le module élastique et le module de perte du matériau.

### 3.5.4 Test de relaxation

L'expérience de relaxation consiste dans un premier temps, à appliquer une déformation au matériau qui est imposée brusquement, puis elle est maintenue constante. Ensuite, cet essai consiste à suivre l'évolution de la contrainte en fonction du temps.

Dans ce test de relaxation, la cinématique imposée à l'élément est un déplacement (croissant + plateau) comme l'illustre la Figure 3-20. L'allure de la réponse numérique en contrainte obtenue correspond bien à celle que l'on peut avoir pour un essai de relaxation sur un matériau (la contrainte qui en résulte diminue progressivement au cours du temps) et la contrainte met un certain temps à atteindre sa valeur finale, du fait du caractère viscoélastique

du matériau. De plus, la réponse numérique obtenue est très proche de celle obtenue analytiquement tel que l'illustre la Figure 3-21.

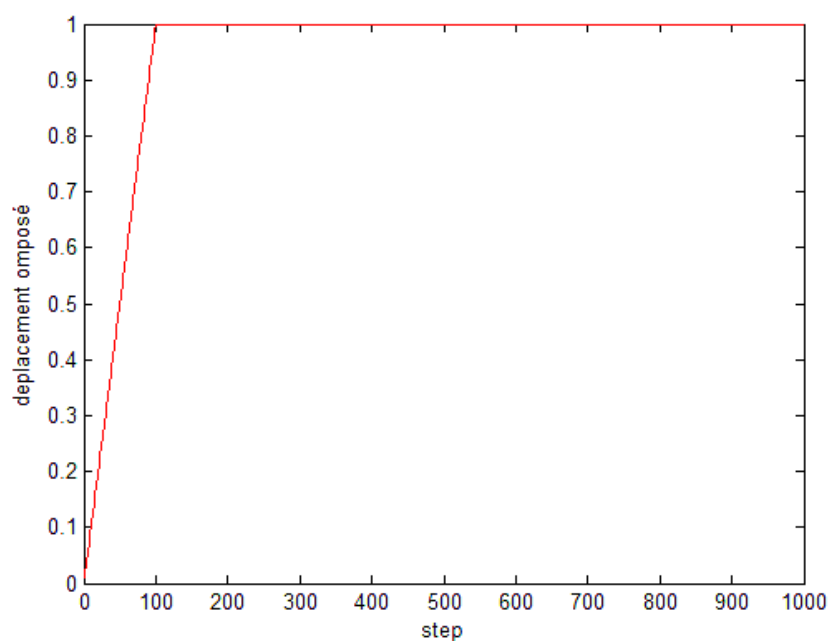


Figure 3-20 Déplacement imposé à l'élément

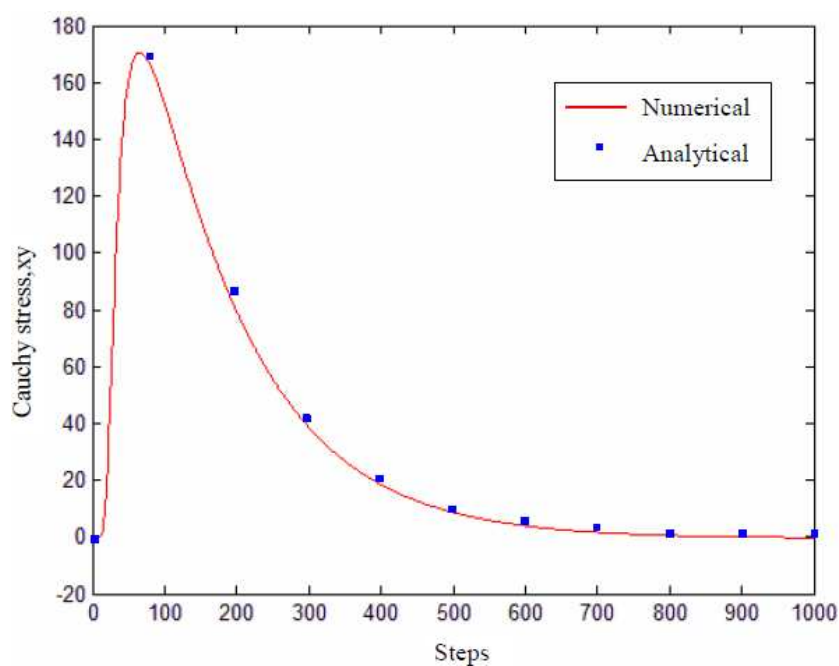


Figure 3-21 Validation du test de relaxation (Composante  $\sigma_{xy}$  du tenseur des contraintes de Cauchy )

## Conclusion du chapitre 3

A travers ce chapitre, la formulation générale des lois de comportement viscoélastiques en grandes déformations a été mise en place. Nous avons également formulé la loi de comportement adoptée pour la simulation de l'étape de formage des films amorphes. Cette loi de comportement a été implémentée dans le code de calcul Plast, dont le principe de fonctionnement a été décrit dans les grandes lignes. Dans la suite, nous avons exposé les essais nécessaires pour l'identification des paramètres de la loi de comportement. Enfin, l'implémentation de la loi de comportement a été validée par une série de tests élémentaires.



# Chapitre 4      Simulation numérique du Chauffage infrarouge

*Comme nous l'avons décrit précédemment, le chauffage du film apparaît comme une étape critique du procédé de thermoformage des films de décoration. Nous avons auparavant évoqué la relation étroite entre les propriétés finales de la pièce thermoformée et la distribution de température du film à l'issue du chauffage IR. Par conséquent, prédire avec fiabilité cette distribution de température est d'un intérêt majeur. Dans ce chapitre, nous présentons le modèle numérique mis en oeuvre (en collaboration avec la société EC2-modelisation) pour simuler l'étape de chauffage IR. L'objectif principal de cette étude est d'intégrer ce modèle thermique (après validation) dans la loi de comportement développée dans le chapitre précédent, afin de simuler la mise en forme des films polymères par le procédé de thermoformage.*

*Ce chapitre débute par une présentation du principe du chauffage par rayonnement infrarouge. Les différentes natures des transferts thermiques mis en jeu dans le cadre de notre procédé durant l'étape de chauffage par IR seront également présentées. Nous exposons ensuite, la modélisation adoptée pour chaque type d'échanges thermiques ainsi que les hypothèses simplificatrices adoptées dans notre modèle. Enfin, les résultats numériques sont validés par comparaison avec des mesures de température réalisées par thermographie infrarouge sur un pilote du laboratoire d'essais du CETIM-CERMAT.*



## SOMMAIRE DU CHAPITRE

4.1 PRINCIPE DU CHAUFFAGE PAR RAYONNEMENT INFRAROUGE .....	85
4.2 NATURE DES TRANSFERTS THERMIQUES LORS DU PROCEDE.....	88
4.3 MODELISATION DES DIFFERENTS TYPES D'ECHANGES THERMIQUES .....	90
4.3.1 Modélisation des échanges conductifs au sein du polymère .....	90
4.3.2 Modélisation des échanges radiatifs entre surfaces (moule↔film↔ environnement) ..	
.....	92
4.3.3 Modélisation du chauffage radiatif par les lampes infrarouges .....	94
4.3.4 Modélisation des échanges convectifs.....	95
4.4 APPLICATION : SIMULATION DU CHAUFFAGE IR DU PROTOTYPE DU CETIM .....	97
4.4.1 Configuration et dispositif expérimental .....	97
4.4.2 Relevés de températures .....	99
4.4.3 Validation avec des mesures expérimentales .....	100
CONCLUSION DU CHAPITRE 4.....	105

## 4.1 Principe du chauffage par rayonnement infrarouge

Le transfert de chaleur par rayonnement est un phénomène fortement non linéaire et ceci d'autant plus que la température est grande. Ce rayonnement est composé de longueurs d'ondes différentes dont l'intensité dépend de la température du corps. Il se propage en ligne droite dans le vide, à la vitesse de la lumière. Le vide constitue un milieu parfaitement transparent.

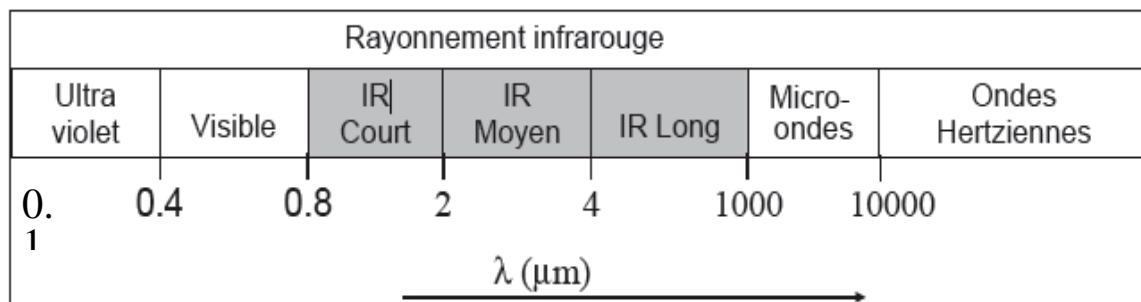


Figure 4-1 Spectre d'émission du rayonnement [MON01]

Comme le montre la Figure 4-1, le rayonnement thermique ne concerne que les longueurs d'onde comprises entre 0.1 et 1000  $\mu m$ . On divise cet intervalle en trois : le rayonnement ultra-violet (UV, 0.1 à 0.4  $\mu m$ ), le rayonnement visible (0.4 à 0.8  $\mu m$ ) et le rayonnement infrarouge (IR, 0.8 à 1000  $\mu m$ ).

La propagation du rayonnement au sein d'un matériau dépend de ses propriétés radiatives. En effet, la majorité des matériaux sont *opaques* : la propagation du rayonnement est stoppée dès la surface. Cependant certains matériaux comme le verre ou certains polymères sont *semi transparents*, la propagation du rayonnement en leur sein s'accompagne d'une diminution de l'énergie transportée. Ainsi ils absorbent et réfléchissent partiellement. Dans ces conditions, il est nécessaire d'établir un bilan radiatif complet afin de déterminer quelle fraction d'énergie émise par les lampes sera reçue par le film.

Considérons la surface d'un milieu semi-transparent (MST) éclairée par un flux incident  $\phi_i$ . Le flux incident émis par la lampe se décompose en trois parties, tel que l'illustre la Figure 4-2 [BOR09b] :

- Le flux réfléchi  $\phi_r$  caractérisé par le facteur de réflexion  $\rho_\lambda$
- Le flux absorbé  $\phi_a$  caractérisé par le facteur d'absorption  $\alpha_\lambda$

- Le flux transmis  $\phi_t$  caractérisé par le coefficient de transmission  $\tau_\lambda$

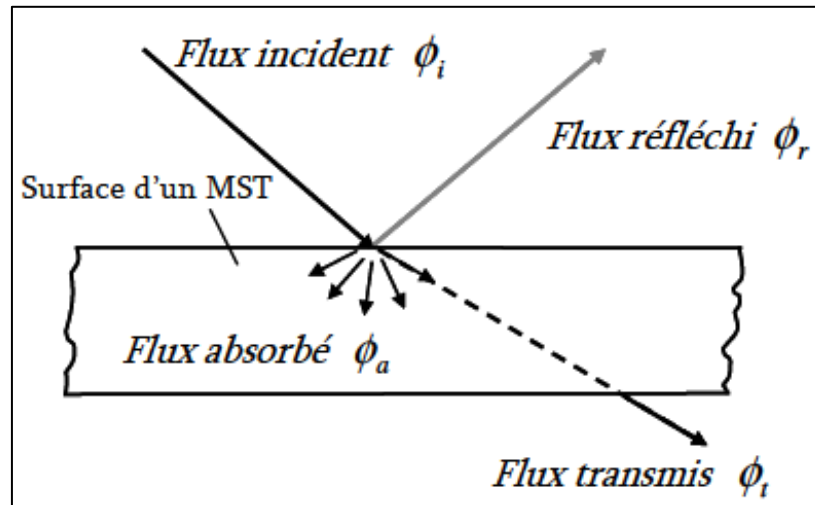


Figure 4-2 Bilan radiatif d'une surface

La relation entre ces trois facteurs est donnée par la 1<sup>ère</sup> loi de Kirchhoff qui traduit la conservation du flux radiatif incident [DEV84] :

$$\alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1 \quad (4.1)$$

Notons également que le flux réfléchi peut être diffus, spéculaire, ou quelconque comme l'illustre la Figure 4-3 [AND05]. Dans le cas d'une réflexion diffuse, le rayonnement réfléchi ne dépend pas d'angle d'incidence. Il est isotrope. Cependant la réflexion spéculaire est caractérisée par un angle de réflexion égale à l'angle d'incidence, dans le plan de la normale à la surface. Enfin, dans le cas le plus général, le rayonnement réfléchi dépend à la fois de l'angle d'incidence et de l'angle de réflexion. Notons que ces différents cas de réflexions sont dépendants de l'état de surface du matériau considéré.

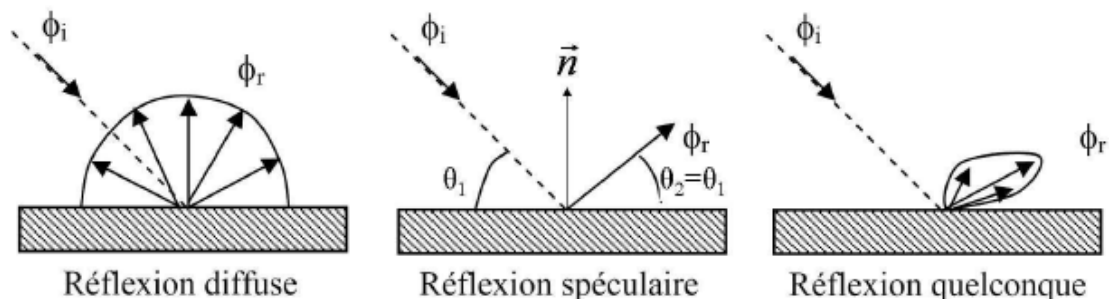


Figure 4-3 Différents types de réflexion d'une surface

Le calcul de flux radiatif reçu par le film en tout point de sa surface dépend de la nature des échanges radiatifs, ces échanges radiatifs peuvent être de deux natures. Dans un premier temps, on parle de transfert de chaleur par rayonnement entre deux corps lorsqu'un matériau considéré comme source émet un rayonnement et que son énergie va être reçue par un autre corps. Dans un second temps, on parle d'autorayonnement lorsque une partie du corps de la source peut être en vis-à-vis d'une autre partie de ce même corps, générant ainsi par le biais du rayonnement, un échange de chaleur au sein d'une même entité. Le calcul de la fraction du flux émis depuis la facette  $S_a$  d'un corps A et reçue par une facette  $S_b$  d'un corps B se fait par le biais de *facteurs de forme*.

Par définition, le facteur de forme  $F_{a \rightarrow b}$  entre une surface  $S_a$  et une surface  $S_b$  est la fraction du flux radiatif émis par  $S_a$  directement reçu par  $S_b$ .

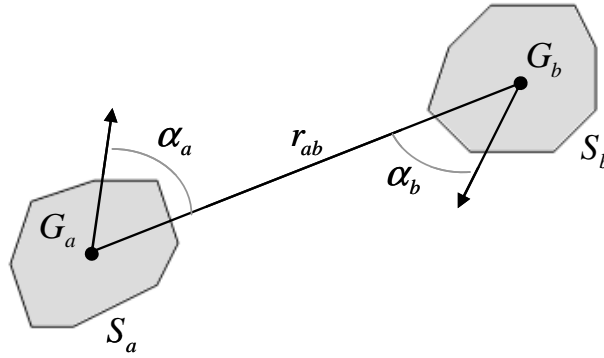


Figure 4-4 Facteur de forme entre deux facettes

Où  $\alpha_a$  est l'angle entre la normale à la facette  $S_a$  et la direction qui relie les centres des facettes en vis à vis,  $\alpha_b$  est l'angle entre la normale à la facette  $S_b$  et la direction qui relie les centres des facettes en vis-à-vis,  $r_{ab}$  est la distance entre les surfaces.

Ainsi le facteur de forme entre deux facettes Figure 4-4 est donné par l'expression suivante :

$$F_{ab} = \frac{\text{Flux émis par } S_a \text{ et reçu par } S_b}{\text{Flux émis par } S_a} \quad (4.2)$$

$$F_{ab} = \frac{1}{\pi S_a} \int_{S_a} \int_{S_b} \frac{\cos \alpha_a \cos \alpha_b}{r_{ab}^2} dS_a dS_b$$

Il existe de nombreuses méthodes numériques [CHU82, EME91, RAM96, ERC07] pour le calcul de ces facteurs de forme. Ils dépendent de la taille des facettes en regard, de leur visibilité et de leur distance.

## 4.2 Nature des transferts thermiques lors du procédé

Le transfert thermique est un processus complexe qui est réalisé en général par la superposition des trois modes de transferts fondamentaux :

Les *transferts radiatifs* qui jouent bien entendu un rôle prédominant durant la phase de chauffage infrarouge. Les *transferts convectifs*, qui résultent de la différence de température entre le film et l'air ambiant, et enfin, les *transferts conductifs* entre les différentes zones de chaque composant du procédé (pièce, moule).

Lors du procédé, au cours de l'étape de chauffage, ces trois types d'échange de chaleur sont couplés. Ainsi, les éléments du film polymère sont susceptibles d'échanger de la chaleur par conduction avec leurs voisins directs, par rayonnement infrarouge avec les lampes chauffantes, par rayonnement thermique avec le moule mais également par convection avec l'air ambiant et avec l'air compris entre le film et le moule, tel que l'illustre la Figure 4-5

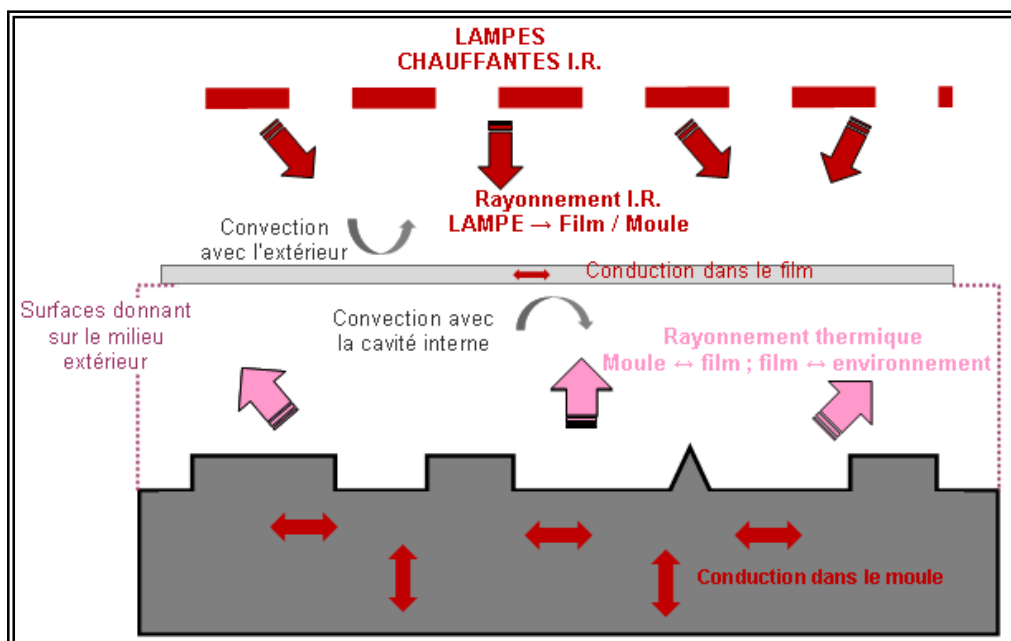


Figure 4-5 Illustration des différents types d'échanges thermiques intervenant dans l'étape de chauffage par infrarouge

Il est possible d'établir l'équation de la chaleur, c'est-à-dire l'équation traduisant mathématiquement l'évolution de la température en tout point du système étudié et à chaque instant [OZI93] :

$$(\rho.C.V).(\frac{\partial T}{\partial t}) = \sum Flux \text{ échangé} \quad (4.3)$$

Où  $T$  est la température,  $\rho$  et  $C$  sont respectivement la masse volumique et la capacité calorifique du matériau.

Ainsi, une fois effectué le bilan des échanges conductifs, convectifs et radiatifs, la température de chaque élément au pas de temps  $t+1$  est calculée à partir des champs de température au pas de temps  $t$  en discrétisant l'équation de la chaleur (éq. 4.3). De plus, au début du calcul le film est supposé avoir une température uniforme :

$$\begin{aligned} \rho_{poly}.C_{poly}.V_i.(\frac{T_i^{t+1}-T_i^t}{\Delta t}) &= \dot{Q}_{rayL,i} + \dot{Q}_{rayM,i} + \dot{Q}_{cond,i} + \dot{Q}_{conv,i} \\ \Rightarrow T_i^{t+1} &= T_i^t + \Delta t \frac{\dot{Q}_{rayL,i} + \dot{Q}_{rayM,i} + \dot{Q}_{cond,i} + \dot{Q}_{conv,i}}{\rho_{poly}.C_{poly}.V_i} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Où  $\dot{Q}_{rayL,i}$  représente le flux de chaleur radiative apporté par les lampes à un élément  $i$  de la surface du film discrétisée,  $\dot{Q}_{rayM,i}$  le flux de chaleur des échanges radiatifs avec le moule,  $\dot{Q}_{cond,i}$  le flux de chaleur des échanges conductifs au sein du film polymère et  $\dot{Q}_{conv,i}$  le flux de chaleur des échanges convectifs.

Notons, qu'il existe différentes méthodes numériques pour modéliser le transfert thermique d'un procédé. Certaines de ces méthodes sont basées sur la méthode des éléments finis [HUA05]. D'autres sur la méthode des différences finies [TCH04a]. Enfin, notons également les modèles basés sur la méthode des volumes-finis [TCH04b, MON01].

A travers cette vue d'ensemble et après avoir établi un bilan thermique, nous avons dégagé les différents et principaux types de transferts thermiques qui interviennent dans le processus de chauffage. Nous abordons à présent les aspects mathématiques liés à la modélisation de ces transferts de chaleur. Rappelons que l'objectif de cette modélisation est de prédire la distribution de la température du film thermoformé.

## 4.3 Modélisation des différents types d'échanges thermiques

### 4.3.1 Modélisation des échanges conductifs au sein du polymère

La conduction est le mode de transfert de chaleur existant dans un milieu donné sans qu'il y ait déplacement apparent de matière et plus particulièrement dans un milieu solide homogène. Elle ne peut exister que s'il existe des écarts de températures c'est-à-dire si le gradient de température n'est pas nul.

La relation fondamentale du transfert de chaleur par conduction a été proposée par Fourier en 1822. Avant de présenter cette loi nous allons définir deux grandeurs physiques nécessaires pour la compréhension de celle-ci :

- Surfaces isothermes

Supposons dans un corps homogène un champ de température  $T$  défini en chaque point et à chaque instant par la fonction  $T = f(x, y, z, t)$ . Ainsi dans tout le corps, nous pouvons définir à l'instant  $t$  des surfaces qui constituent les lieux des points ayant la même température. Ces surfaces sont appelées isothermes. Ainsi, deux surfaces isothermes ne peuvent se couper car si c'est le cas, on aurait alors deux températures différentes en un même point ce qui est physiquement impossible.

- Gradient de température

Le gradient de température est le vecteur qui caractérise en un point donné la variation de la fonction température. Ce vecteur est en tout point normal à la surface isotherme passant par ce point.

Ainsi la loi de FOURIER nous donne le flux de chaleur  $dQ$  qui traverse la surface  $dS$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  dans le sens de la normale à la surface  $\vec{n}$  par la relation suivante :

$$d^2Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T} \cdot \vec{n} \cdot dS dt^1 \quad (4.5)$$

---

<sup>1</sup> La présence du signe – dans le second membre de la relation signifie que le flux de chaleur progresse dans le sens opposé au gradient de température c'est-à-dire des températures les plus élevées vers les températures les plus basses.

Où  $\overline{gradT}$  est le gradient de température et  $\lambda$  est la conductivité thermique du matériau.

Dans le cadre de notre étude, les échanges de chaleur par conduction au sein du film sont calculés en supposant que le film thermoformé est constitué d'éléments *coque* dont la température est homogène dans l'épaisseur. La justification de cette approche est que le film thermoformé d'épaisseur constante est très fin par rapport à sa surface. Ainsi, le flux thermique échangé entre l'élément courant (noté élément i) et chacun des éléments surfaciques voisins (notés éléments n) dépend de la conductivité du polymère  $\lambda_{poly}$  formant le film, du gradient de température  $(\frac{\partial T}{\partial S})_n$  et de la surface de contact  $S_n$  entre les éléments ( $E_{film}$  représente l'épaisseur du film), tel que l'illustre la Figure 4-6 :

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{cond,i,n} &= \lambda_{poly} \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial S} \right)_n \cdot S_n \\ &= \lambda_{poly} \cdot \frac{T_{i,n} - T_i}{\Delta S_n} \cdot l_n \cdot E_{film}\end{aligned}\quad (4.6)$$

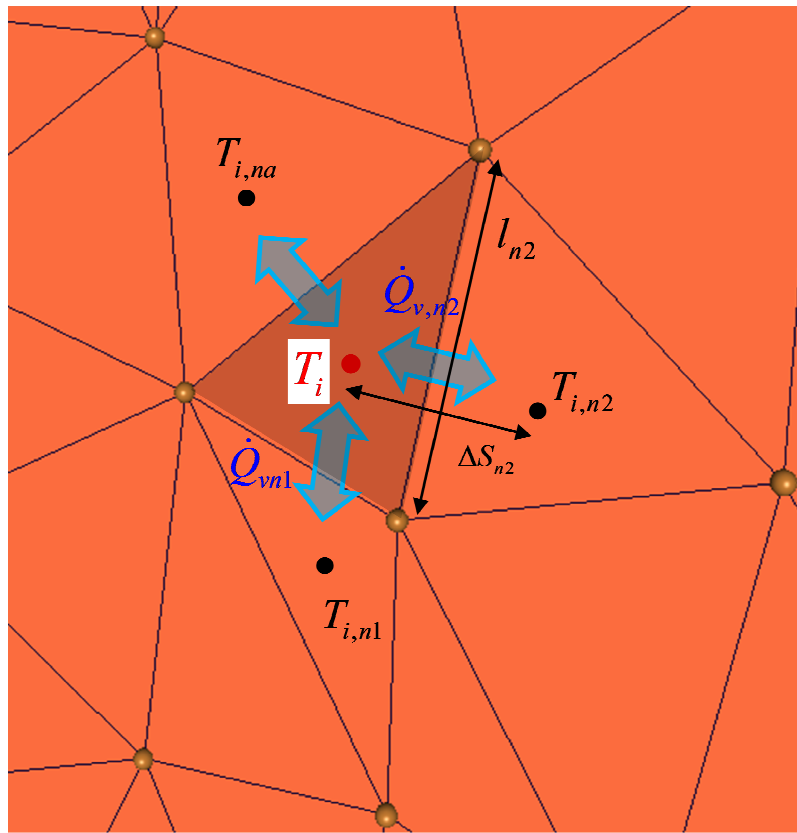


Figure 4-6 Illustration des échanges conductifs entre éléments au sein du film



Ainsi, le flux de chaleur par conduction total est donné par :

$$\dot{Q}_{cond,i} = \sum_{n=1}^{N_{vois}} \dot{Q}_{cond,i,n} \quad (4.7)$$

Où  $N_{vois}$  est le nombre des voisins latéraux de l'élément  $i$ .

#### 4.3.2 Modélisation des échanges radiatifs entre surfaces (moule↔film↔environnement)

Le calcul des échanges de chaleur par rayonnement thermique entre chacune des surfaces en regard est effectué en considérant que ces surfaces forment une enceinte fermée contenant un milieu fluide parfaitement transparent. Ainsi, dans le calcul d'échange radiatif entre le film et le milieu extérieur, il sera nécessaire de connaître la température de milieu extérieur qui devra être renseignée en donnée d'entrée.

Les surfaces du moule et de la plaque sont décomposées en éléments surfaciques tandis que la surface donnant sur le milieu extérieur est composée d'une seule et même surface. Le flux de chaleur échangé par rayonnement entre chacune de ces surfaces est calculé en effectuant un bilan prenant en compte l'énergie radiative émise par la surface et l'énergie reçue en provenance des autres surfaces :

$$\dot{Q}_{rayM,i} = -\varepsilon_i \cdot S_i \cdot \sigma_{SB} \cdot T_i^4 + \sum_{j=1}^{N_{surf}} \varepsilon_j \cdot S_j \cdot \sigma_{SB} \cdot T_j^4 \cdot F_{j,i} \quad (4.8)$$

Où  $T_j$ ,  $\varepsilon_j$  et  $S_j$  sont respectivement la température, l'émissivité et l'air de la surface  $j$ .  $\sigma_{SB}$  représente la constante de Stefan-Boltzmann égale à  $5,67.10^{-8} J.K^{-4}.m^{-2}.s^{-1}$ ,  $F_{j,i}$  est le facteur de forme de la surface  $j$  vers la surface  $i$  et qui représente la fraction du flux radiatif émis par  $S_j$  directement reçu par  $S_i$ .

Notons également que la loi de conservation d'énergie radiative, nous donne la relation suivante :

$$\sum_{j=1}^{N_{surf}} F_{i,j} = 1 \quad \forall i = 1, N_{surf} \quad (4.9)$$

D'un point de vue numérique, la difficulté principale réside dans la détermination de ces facteurs de forme qui dépendent très fortement de la géométrie de l'enceinte formée.

Dans notre étude, nous utilisons la méthode du lancer de rayon qui permet de tenir compte du chemin réellement suivi par le rayonnement. Cette approche consiste à suivre le trajet d'un photon émis depuis une source de manière à connaître les zones éclairées dans son environnement [CAI92, COS11]. Cette méthode présente également l'avantage de prendre en compte de manière très précise la géométrie de l'enceinte et peut être adaptée facilement à toute modification de cette géométrie.

Le principe est de lancer un nombre très important de rayons  $N_{RAY}$  à partir de chacune des surfaces et de suivre leur trajet jusqu'à ce qu'ils soient absorbés par une des surfaces de l'enceinte (Figure 4-7). Chaque rayon représente un quanta d'énergie radiative. Ainsi on peut estimer le facteur de forme  $F_{j,i}$  en comptant le nombre de rayons lancés  $N_{j,i}$  à partir de la surface  $j$  qui atteignent la surface  $i$  :

$$F_{j,i} = \frac{N_{j,i}}{N_{RAY}} \quad (4.10)$$

Les points de départ et les directions de départ de chaque rayon lancé depuis la surface  $j$  sont choisis aléatoirement en respectant toutefois une probabilité de direction de départ.

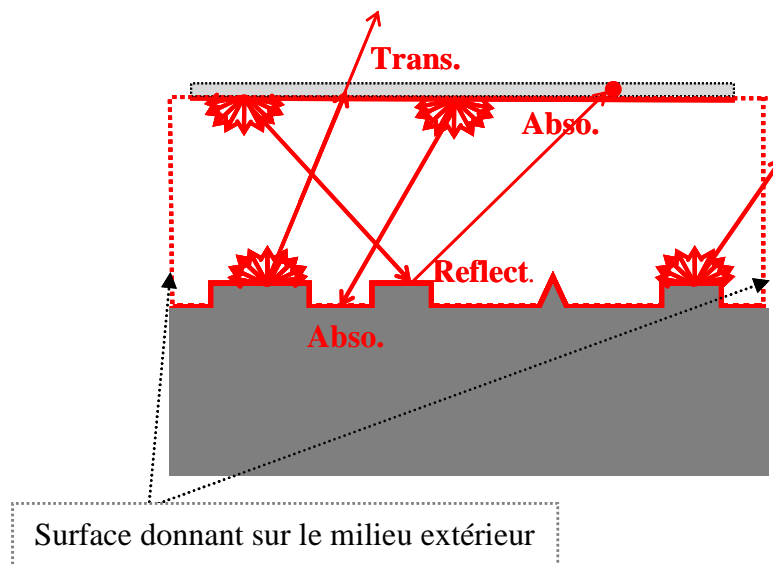


Figure 4-7 Illustration du principe de lancer de rayon pour le calcul des facteurs de forme entre les éléments du film et du moule

Enfin, notons également que la précision des valeurs de  $F_{j,i}$  calculées par cette méthode dépendent du nombre de rayons lancés. Un grand nombre de lancers permet une estimation très précise mais présente l'inconvénient d'un temps de calcul très important. Pour s'affranchir de ce problème, il est nécessaire d'ajuster le paramètre  $N_{RAY}$  afin de limiter le temps de calcul et tout en gardant une précision satisfaisante.

#### 4.3.3 Modélisation du chauffage radiatif par les lampes infrarouges

Le calcul des échanges de chaleur par rayonnement infrarouge entre les lampes et les éléments de la surface polymérique discrétisée est déterminé en se basant sur l'approche présentée précédemment (cf 4.2.1). Cependant, dans ce cas précis, les rayons sont lancés à partir des lampes chauffantes comme l'illustre la Figure 4-8. Les facteurs de forme  $F_{j,i}$  sont calculés entre les lampes  $L$  et tous les éléments  $i$  de la surface en comptant le nombre de rayons lancés  $N_{L,i}$  à partir des lampes qui atteignent la surface  $i$  :

$$F_{L,i} = N_{L,i} / N_{RAY} \quad (4.11)$$

Ainsi, le flux de chaleur apporté par les lampes à la surface  $i$  est donné par :

$$\dot{Q}_{L,i} = F_{L,i} \cdot P_L \quad (4.12)$$

Où  $P_L$  est la puissance totale fournie par les lampes chauffantes.

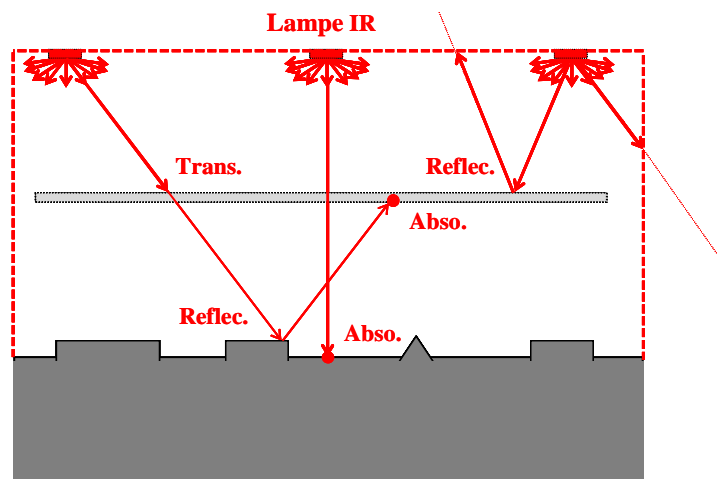


Figure 4-8 Principe de lancer de rayon pour le calcul des facteurs de forme entre les lampes chauffantes et les éléments du film et du moule

#### 4.3.4 Modélisation des échanges convectifs

Selon le mécanisme qui génère le mouvement du fluide, on distingue : la convection naturelle et la convection forcée.

- La convection naturelle

Le fluide est mis en mouvement sous le seul effet : des différences de masses volumiques résultant des différences de températures sur les frontières, ou d'un champ de forces extérieures tel que la pesanteur.

- La convection forcée

Le mouvement du fluide est induit par une cause indépendante des différences de température (une pompe, un ventilateur,...).

Dans le cadre de notre procédé, les échanges de chaleur par convection sont de type naturel. Ainsi, le film et le moule échangent par convection naturelle à travers l'air compris dans la cavité  $\dot{Q}_{conv,2}$ , et le film échange également par convection naturelle avec l'air environnant  $\dot{Q}_{conv,1}$ .

Ces flux de chaleur convectifs  $\dot{Q}_{conv} = \dot{Q}_{conv,1} + \dot{Q}_{conv,2}$  sont calculés par la relation dite *loi de Newton* :

$$\dot{Q}_{conv} = h_c . S . (T_s - T_f) \quad (4.13)$$

Où  $S$  est la surface d'échange,  $(T_s - T_f)$  est la différence de température entre le solide et le fluide,  $h_c$  est le coefficient d'échange.

Le point majeur à résoudre avant le calcul du flux de chaleur consiste à déterminer  $h_c$  qui dépend de nombreux paramètres (la température, les caractéristiques du fluide et la forme de la surface d'échange).

Pour les échanges film  $\longleftrightarrow$  environnement, le coefficient d'échange  $h_{c1}$  pour une plaque verticale ou horizontale en convection naturelle dans l'air est donné par plusieurs formules (corrélations) empiriques [OZI85, TAI98]. Le tableau ci-dessous indique des valeurs de  $h_{c1}$  ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ ) en fonction de la température pour une plaque verticale et horizontale :

Position du film	Ecart de température Air – Film ( $\Delta T$ )			
	10°C	100°C	200°C	400°C
Verticale	4	7	8	10
Horizontale	5	9	11	13

Tableau 5 Valeurs de  $h_{c1}$  en fonction de la position du film et de la différence de température entre l'air et le film (cas convection naturelle)

Le flux de chaleur convectif pour un élément  $i$  du film est finalement calculé par la relation suivante :

$$\dot{Q}_{conv,i,1} = h_{c1} \cdot S_i \cdot (T_{ext} - T_i) \quad (4.14)$$

Cette relation est valable seulement lorsque la température de l'air environnant  $T_{ext}$  reste constant durant le chauffage. Cette condition est vérifiée en supposant que la durée de chauffage est suffisamment faible pour que la température de l'air environnant ne change pas de manière considérable.

Pour les échanges par convection naturelle entre le film et le moule, le coefficient de transfert  $h_{c2}$  rend compte du flux convectif entre deux surfaces, à température différentes. Dans le cas de notre modèle, les hypothèses et approximations utilisées sont les suivantes :

- Les formules empiriques donnant  $h_{c2}$  pour deux plans parallèles restent valables, même si en réalité, la surface du moule ne soit pas plane. Le flux de chaleur convectif échangé entre les deux surfaces est défini dans ce cas :

$$\dot{Q}_{conv,2} = h_{c2} \cdot S \cdot (T_{film} - T_{moule}) \quad (4.15)$$

- Le flux surfacique échangé est supposé homogène sur les deux surfaces, ainsi les valeurs moyennes des températures des deux surfaces  $T_{film}$  et  $T_{moule}$  sont utilisées.

Finalement, le flux convectif échangé par chaque élément des deux surfaces (film ou moule) avec l'autre surface est calculé par les relations suivantes :

- L'élément  $i$  appartient à la surface du film :  $\dot{Q}_{conv,2,i} = h_{c2} \cdot S_{\angle,i} \cdot (T_{moule} - T_{film})$
- L'élément  $i$  appartient à la surface du moule :  $\dot{Q}_{conv,2,i} = h_{c2} \cdot S_{\angle,i} \cdot (T_{film} - T_{moule})$

Où  $S_{\angle,i}$  est la surface de l'élément  $i$  en regard avec la surface opposée.

## 4.4 Application : Simulation du chauffage IR du prototype du CETIM

Le modèle présenté précédemment a été mis en œuvre afin de simuler le chauffage IR de films polymères lors d'un procédé de décoration de pièces plastiques dans les mêmes conditions opératoires que celles du pilote de laboratoire du CETIM-CERMAT.

L'objectif est de valider ces simulations à l'aide de mesures thermographiques afin de mettre en évidence la fiabilité du modèle, en vue d'intégrer celui-ci dans le modèle mécanique (cf chapitre 3) consacré à la simulation de la mise en forme des films de décoration dans le cas d'un procédé de thermoformage.

### 4.4.1 Configuration et dispositif expérimental

Le pilote de thermoformage du CETIM-CERMAT dispose de deux plateaux chauffants infrarouges, verticaux, portés par un bras robot mobile, chaque plateau étant composé de sept lampes présentant une puissance nominale de 1000 W. Durant l'étape de chauffage, le film à thermoformer est positionné sur l'empreinte du moule (Figure 4-9) et fixé par un cadre pour assurer l'étanchéité. Les paramètres de contrôle de l'utilisateur sont les suivants :

- Le pourcentage de la puissance nominale affecté aux lampes.
- Le temps de chauffage.
- La distance de chauffe.

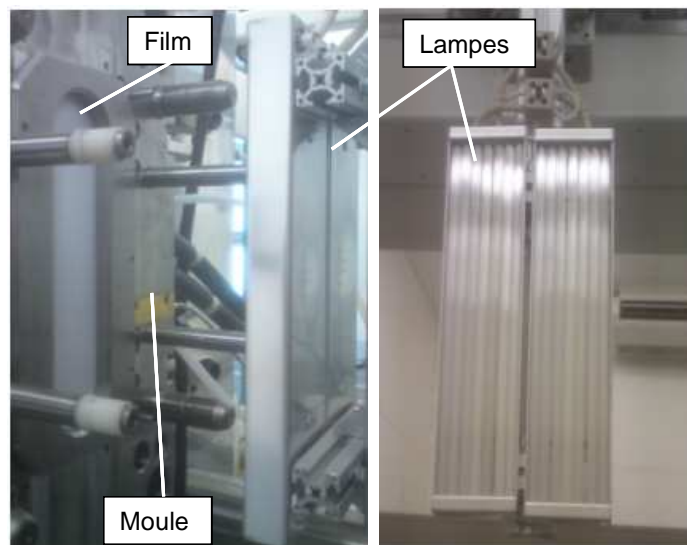


Figure 4-9 Process expérimental du CETIM



## 4.4.2 Relevés de températures

### 4.4.2.1 Principe de mesure par thermographie infra-rouge

La thermographie permet d'obtenir l'image thermique d'une scène par mesure du flux de rayonnement émis dans un domaine spectral limité. Ainsi le système de mesure se compose d'une caméra thermique et d'une station permettant la transcription des flux de rayonnement en températures. Cette transcription suppose un étalonnage préalable généralement réalisé sur un corps noir (corps émissif idéal) [PAJ01, ERN04].

Dans le cadre général de mesures sur corps réel, il faut prendre en compte les diverses composantes du flux : le flux émis par la pièce, le flux réfléchi sur la pièce et le flux transmis au travers de la pièce. Ce qui nous intéresse en thermographie, c'est le flux émis par l'objet car il est directement lié à la température du matériau. Notons également que l'estimation à partir de la réponse de la caméra nécessite la connaissance de l'émissivité de l'objet analysé.

### 4.4.2.2 Positionnement de la caméra infrarouge

Dans le cadre de notre dispositif expérimental, la caméra infrarouge IR est placée en diagonale par rapport à l'axe de la presse de manière à ce que le film ne soit pas caché par le système de chauffage du film (lampes infrarouges) de décoration. La Figure 4-12 illustre bien le cas :

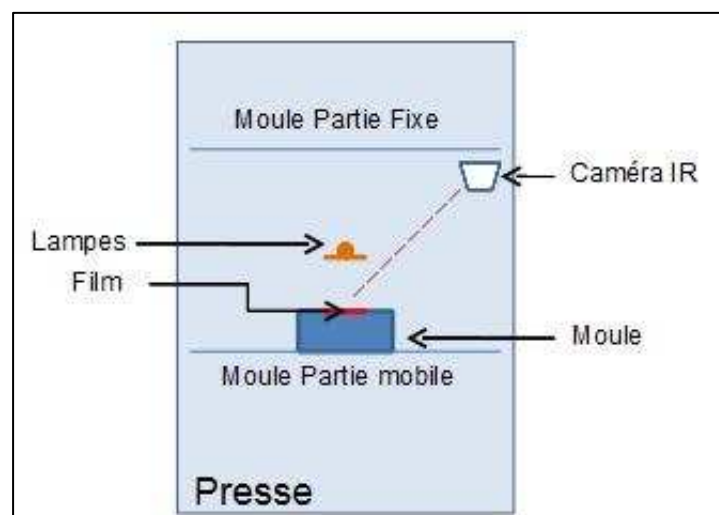


Figure 4-12 Positionnement de la caméra IR



#### 4.4.3 Validation avec des mesures expérimentales

Les Figures 4-13 et 4-18 comparent les résultats numériques obtenus par la simulation du chauffage IR d'un film PS sur le moule du CETIM (forme demi-œuf), avec ceux obtenus expérimentalement. La Figure 4-13 concerne la distribution de la température sur la surface avant du film en PS pour un temps de chauffage égal à 25 secondes. Dans cette figure, nous nous intéressons plus particulièrement à la distribution de la température pour le moule en forme de *demi-œuf*. Ainsi, nous pouvons mettre en évidence plusieurs points:

- Tout d'abord nous constatons des différences de températures à la surface du film, dues à la cavité du moule qui concentre le rayonnement, aux phénomènes de convection entre les lampes et le film et aux circuits de refroidissement du moule.
- La zone thermique prédite la plus chaude correspond à la zone de cavité du moule, elle est en accord avec les mesures. Ceci révèle que les transferts thermiques par rayonnement sont correctement calculés.
- Enfin, nous pouvons constater un bon accord entre la température prédite numériquement (Figure 4-13b) et la température mesurée à l'aide de la camera IR (Figure 4-13a). L'écart relatif sur la température est inférieur à 6.5 %.

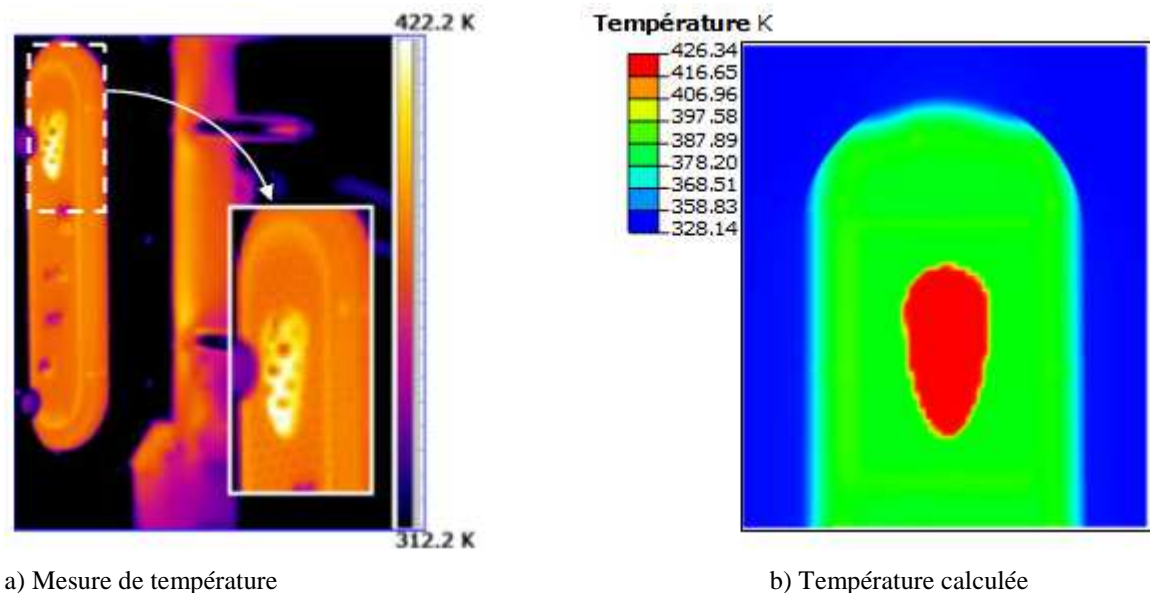


Figure 4-13 Distribution de la température sur la surface avant du film PS

Pour déterminer et montrer l'allure de l'évolution de la température du film prédite en fonction du temps. Nous avons tracé cette évolution en quatre positions distinctes sur le film (Figure 4-15).

Le positionnement de ces quatre points est illustré par la Figure 4-14 : le premier point est situé à l'extrémité du moule (0 cm), le deuxième à 0.5 cm, le troisième à 1.5 cm et le quatrième au niveau du sommet de la cavité du moule en forme de demi-œuf.

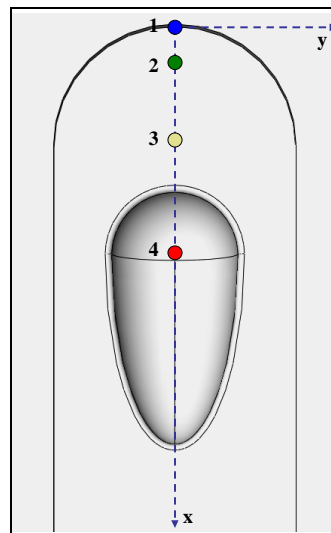


Figure 4-14 Positionnement des quatre points choisis

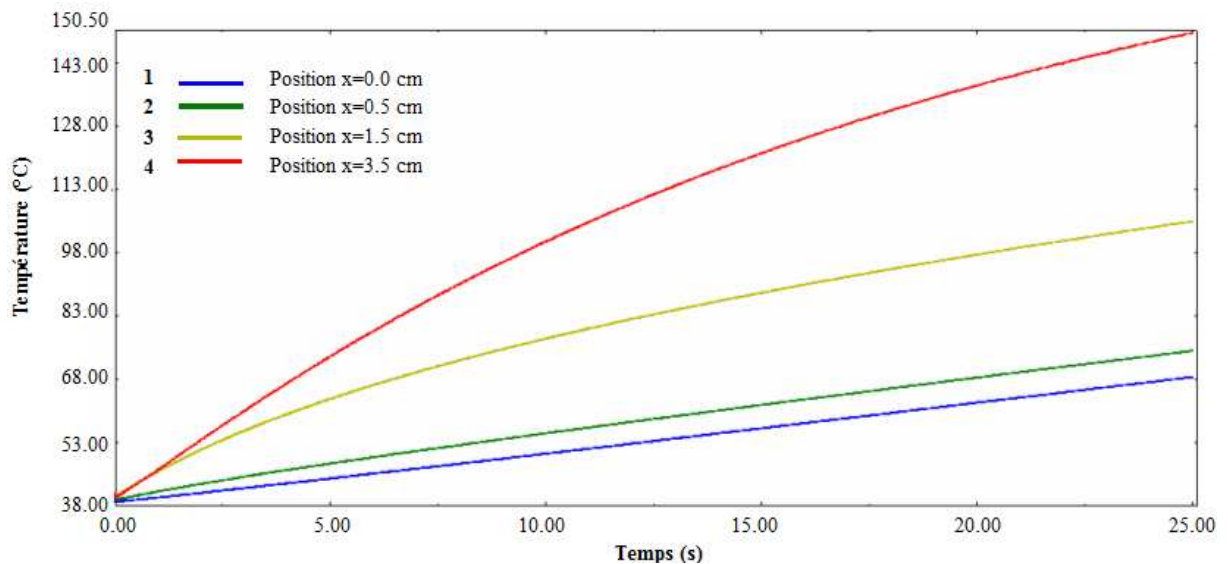


Figure 4-15 Evolution de la température prédite du film pour quatre positions (simulation)

Les courbes de températures obtenues pour les positions 1 et 2 montrent une allure presque linéaire durant la phase de chauffage par IR telle que l'illustre la Figure 4-15. Cependant, celles des positions 3 et 4 (plus particulièrement pour la position 4) ont un profil non linéaire.

Ces résultats sont justifiés par le fait qu'en réalité, ce comportement linéaire est vérifié si la température n'a pas atteint la température de transition vitreuse du film [ERC05], ce qui est le cas de la position 1 et 2. Cependant il n'est plus observé lorsque la température s'approche de la température de transition vitreuse du film (position 4), car au voisinage de la  $T_g$ , les propriétés thermiques du matériau varient avec la température, et plus particulièrement celle de la capacité calorifique, comme l'illustre la Figure 4-16 :

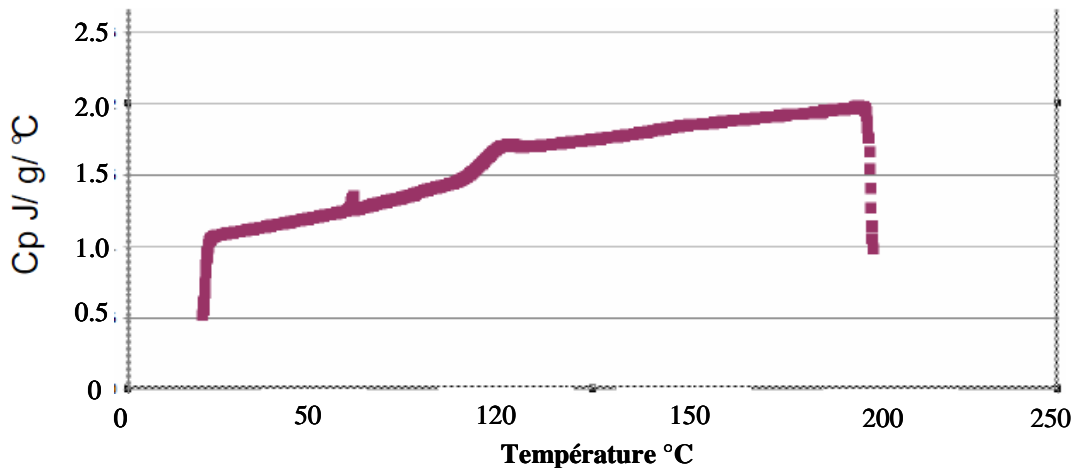
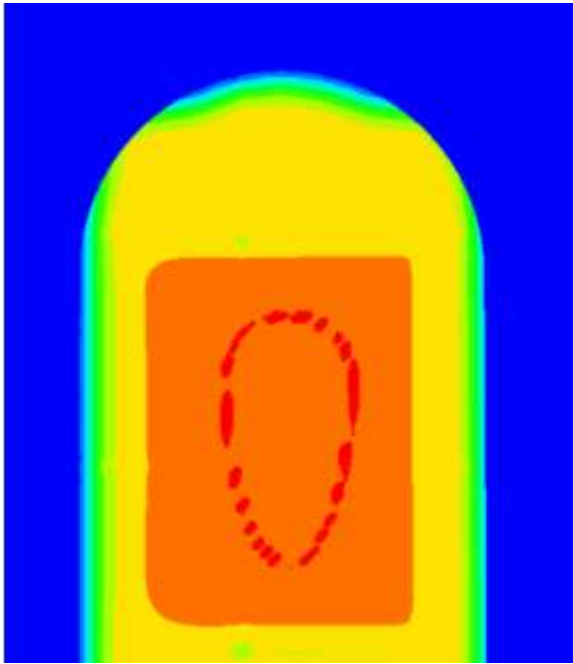


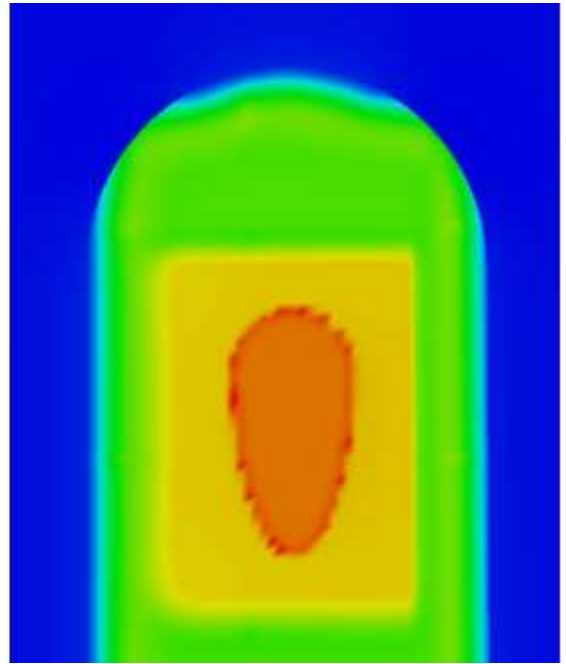
Figure 4-16 Capacité calorifique du PS en fonction de la température

En ce qui concerne, l'évolution temporelle de la cartographie de température du film prédite au cours du chauffage, elle est illustrée dans la Figure 4-17 et cela pour plusieurs étapes. Ainsi, nous pouvons mettre en évidence les points suivants :

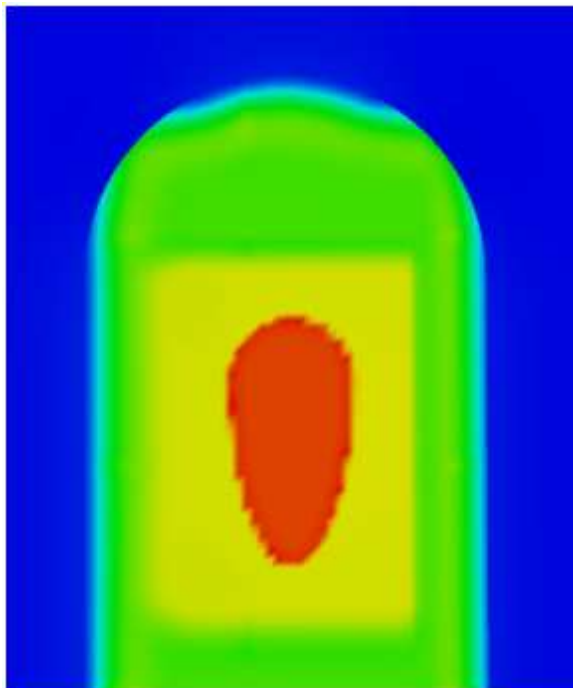
- Le ralentissement dans le chauffage du film pendant les premières secondes s'explique par le mauvais comportement en conduction thermique du PS.
- Après 5 secondes de chauffage, nous constatons, au centre du film (au niveau de la cavité du moule *demi-œuf*), l'établissement d'une différence de température par rapport aux autres zones du film. Cette différence est due à l'importance des transferts radiatifs au niveau de la cavité du moule.
- Enfin, le palier de température correspondant à la température de transition vitreuse du PS est atteint en environ 15 secondes. Malgré cela, un temps de 25 secondes de chauffe semble nécessaire pour obtenir un bon thermoformage. En effet, ce temps supplémentaire doit permettre de relaxer d'avantage les contraintes internes au film.



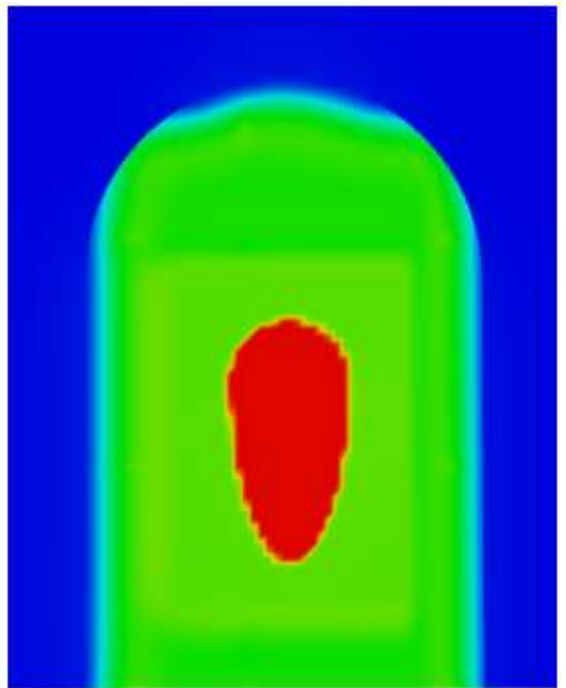
Temps de chauffe : 5 secondes



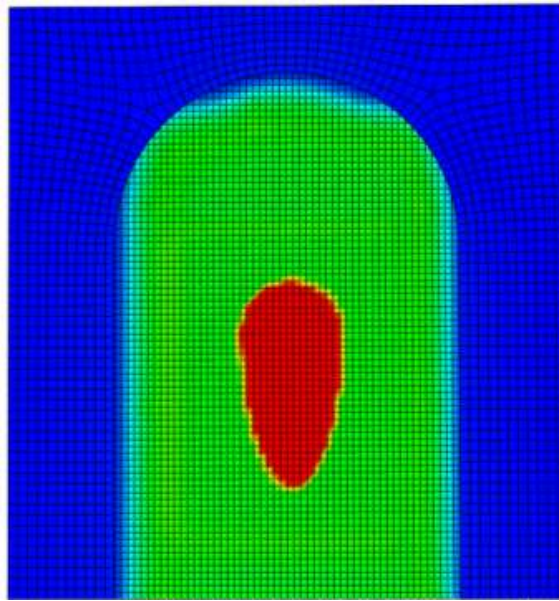
Temps de chauffe : 10 secondes



Temps de chauffe : 15 secondes



Temps de chauffe : 20 secondes



Temps de chauffe : 25 secondes

Figure 4-17 Cartographie de la température du film pour différents étapes de chauffage

Enfin, pour mettre d'avantage en évidence la fiabilité du modèle, l'évolution de la température prédite sur la face du film en deux points tels que l'illustre la Figure 4-18 est comparée avec les mesures expérimentales. Nous pouvons à nouveau constater un bon accord entre les prédictions et les mesures expérimentales. L'écart relatif entre les résultats numériques et expérimentaux est inférieur à 4% au niveau du point situé à l'extérieur de la cavité du moule et atteint 6% au niveau de cette cavité.

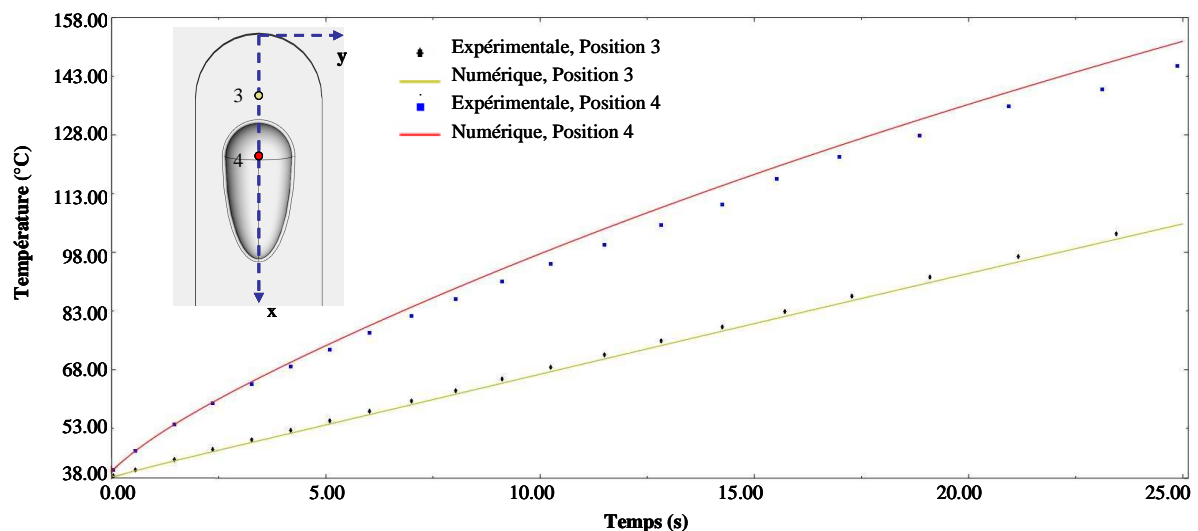


Figure 4-18 Evolution de la température en deux positions du film (sur la face exposée aux lampes)

## Conclusion du chapitre 4

Dans ce chapitre, les lois concernant les transferts thermiques mis en jeu durant l'étape de chauffage IR ont été présentées. Un intérêt particulier a été accordé à la modélisation des transferts radiatifs. En effet, ces transferts radiatifs jouent un rôle prédominant durant la phase de chauffage infrarouge. Les hypothèses simplificatrices adoptées dans notre modèle, et leur validité dans le cadre du thermoformage ont été exposées. Ensuite la méthodologie adoptée pour simuler l'étape de chauffage infrarouge a été présentée.

Dans un second temps, nous avons mis en œuvre le modèle thermique développé, afin de simuler la phase de chauffage du procédé et prédire la distribution de la température sur la face du film thermoplastique. Les résultats numériques ont été validés expérimentalement à l'aide de mesures de température réalisées par des pastilles (thermocouples) collées sur le film sur un pilote du CETIM-CERMAT.

Cette étude démontre que le modèle est capable de prédire la distribution de la température du film au cours du thermoformage, ainsi que son évolution temporelle, avec une erreur raisonnable.



## Chapitre 5 Exemples de simulations de mise en forme de films polymères par thermoformage

*Dans le chapitre précédent, un modèle thermique a été présenté pour simuler l'étape de chauffage IR, afin de prédire la distribution de température du film à l'issue de ce chauffage. De plus, L'hypothèse de découplage du calcul thermo-mécanique a été admise. La justification de cette hypothèse est que la durée de l'étape de formage est très courte (de l'ordre de quelques dixièmes de seconde). Ainsi, le modèle thermique proposé et validé par comparaisons des résultats numériques avec des mesures expérimentales a été implémenté dans la loi de comportement (mis en œuvre dans le chapitre 3) pour simuler la mise en forme à la température calculée. Cette loi de comportement a été soumise à plusieurs tests de références en vue de validation du modèle.*

*Dans ce chapitre, nous proposons de pratiquer un certain nombre de simulations sur deux démonstrateurs distincts du consortium. Le premier démonstrateur est celui du CETIM à Mulhouse et le second est réalisé au PEP à Oyonnax. Le film utilisé est un PS d'épaisseur 100  $\mu\text{m}$ .*

*L'objectif majeur de ces simulations est de prédire la distribution d'épaisseur du film thermoformé. En effet, un des critères principaux permettant d'apprécier la qualité de la pièce thermoformée demeure sa distribution d'épaisseur.*



## SOMMAIRE DU CHAPITRE

5.1 DEMONSTRATEUR DU CETIM-CERMAT .....	109
5.1.1 Configuration adoptée pour la simulation .....	109
5.1.2 Résultats de simulation et validation.....	110
5.2 DEMONSTRATEUR DU PEP .....	116
5.2.1 Descriptif du prototype et dispositif.....	116
5.2.2 Configuration adoptée pour la simulation .....	117
5.2.3 Résultats de simulation.....	118

## 5.1 Démonstrateur du CETIM-CERMAT

On se propose dans ce paragraphe de simuler la mise en forme par thermoformage d'un film polymère sur les géométries du moule du CETIM. Le dispositif expérimental du pilote du CETIM a été présenté précédemment dans la partie 4.4.1. La géométrie de cette pièce est illustrée par la Figure 5-1 :

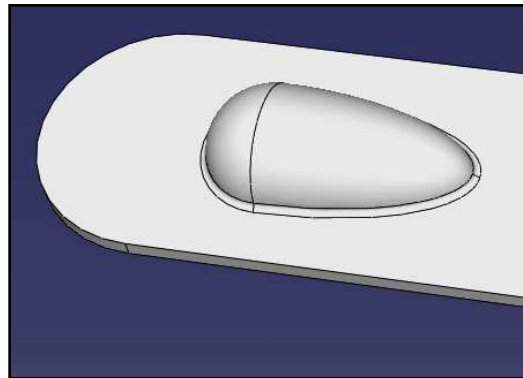


Figure 5-1. Pièce du démonstrateur du CETIM

### 5.1.1 Configuration adoptée pour la simulation

Le film polymère est initialement un rectangle maillé régulièrement à l'aide d'éléments finis quadrangulaires. Il en est de même pour la facettisation du moule.

La forme obtenue du film après thermoformage sur un moule donné est celle prise par le film en épousant le moule sous l'action d'une dépression appliquée. Les caractéristiques mécaniques et rhéologiques du PS utilisé ont été identifiées et présentées dans la partie 3.4. Enfin, les données du process appliquées sont telles que la température de l'outillage est égale à 60 °C, et la dépression d'aspiration est de 60 mbar. Ainsi, le thermoformage peut être pratiqué sur le *demi-œuf*.

Les calculs sont effectués sur 15000 pas de temps avec un pas de temps de  $10^{-5}$  s. L'étanchéité assurée par un cadre entre le film et l'empreinte du moule est modélisée en imposant une condition aux limites de non déplacement aux nœuds positionnés sur les extrémités du film.

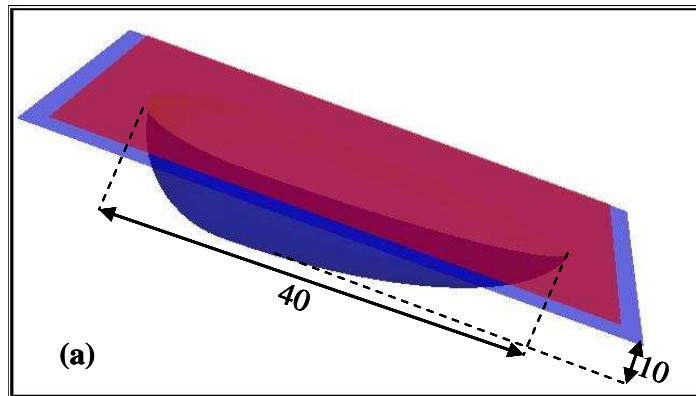


Figure 5-2 Géométries des Outils

### 5.1.2 Résultats de simulation et validation

La déformée finale du film est illustrée Figure 5-3. Nous constatons que la déformation du film apparaît majoritairement longitudinale au fond du demi oeuf (en haut sur la Figure 5-4 (a) et au milieu du demi-œuf (uni-axial planaire). La déformation de la partie postérieure du demi-œuf (cf. Figure 5-4 (b)) est biaxiale, ce qui concorde bien avec les résultats expérimentaux (Figure 5-4 (b)).

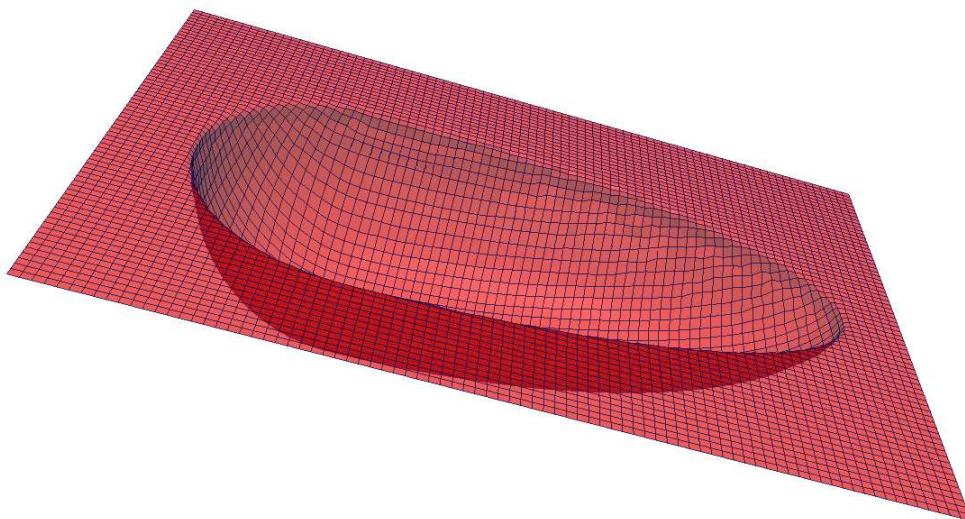


Figure 5-3 Déformée du film thermoformé dans le moule demi-œuf

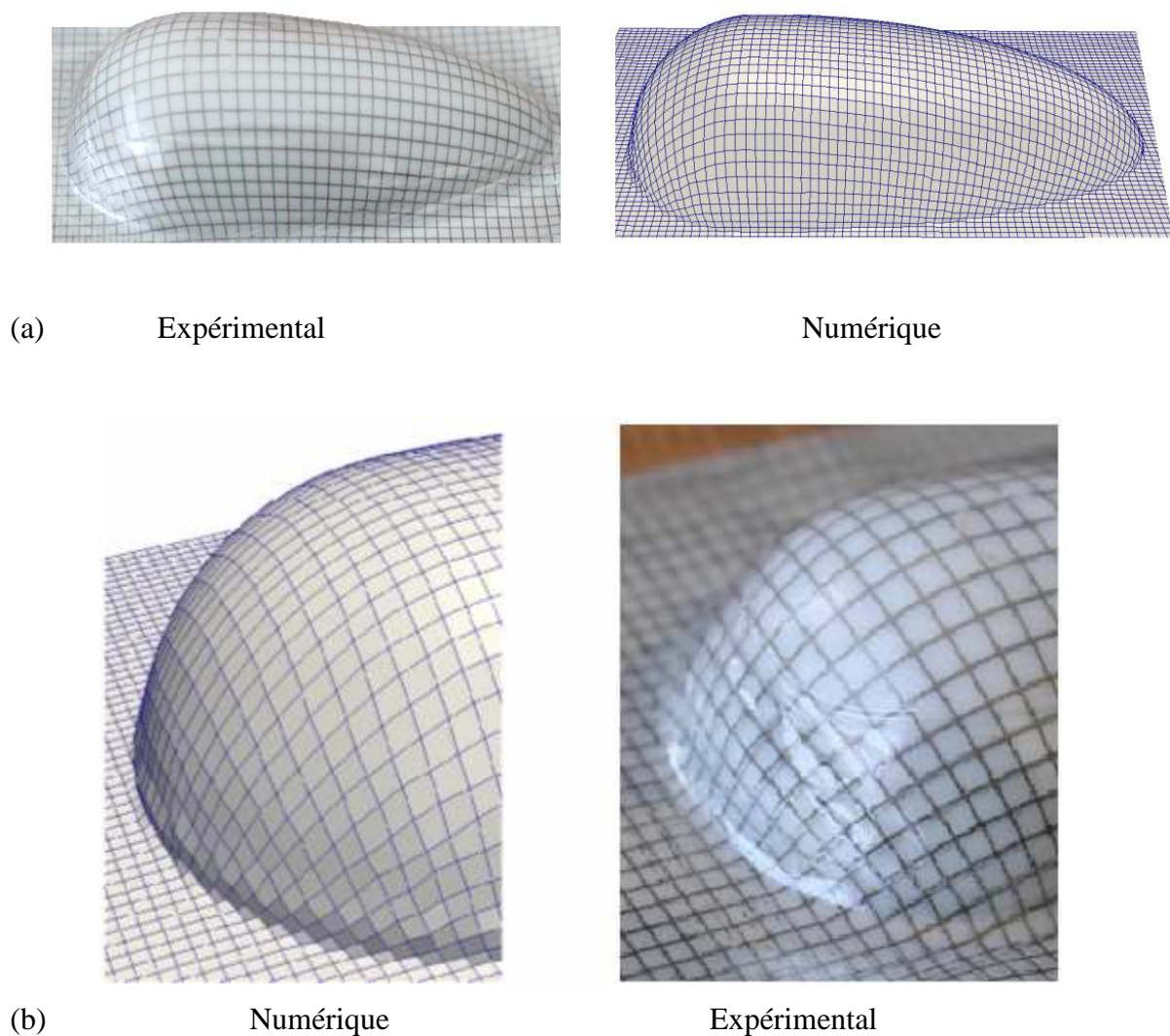


Figure 5-4 Comparaison de déformée d'un film thermoformé dans le moule du CETIM

Notons également que l'observation de déformation transversale de la zone postérieure du demi-œuf (cf. Figure 5-4 (b)) est cohérente avec la diminution notable de l'épaisseur prédite dans cette zone, comme l'illustre ultérieurement la Figure 5-6.

Les observations de la déformation du film au cours du procédé sont complétées par une comparaison des résultats numériques aux résultats expérimentaux de la déformée, en terme d'élongation longitudinale  $\lambda_L$ . Ainsi, la Figure 5-5 présente les taux d'étirage longitudinaux, locaux (dimension courante rapportée à la dimension initiale) suivant un arc situé sur le fond du demi-œuf (en haut sur la Figure 5-5). Nous pouvons constater qu'il y a un bon accord entre les résultats numériques et les mesures expérimentales.

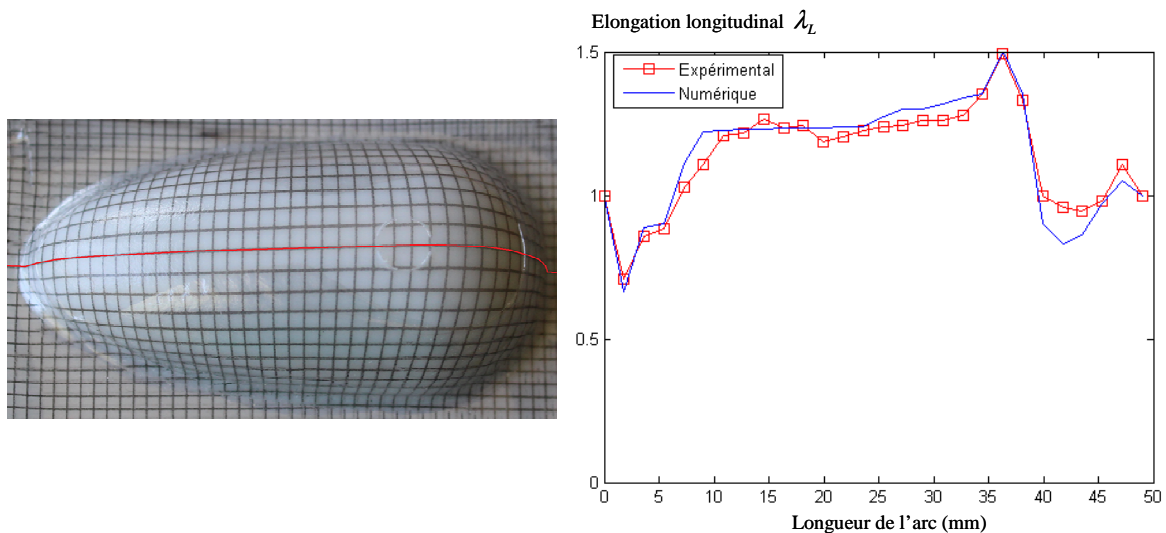


Figure 5-5 Distribution de l'élongation longitudinale après formage suivant un arc situé sur le fond du demi-œuf (en haut sur la Figure)

Un autre critère majeur utilisé pour valider les résultats numériques est la distribution d'épaisseur du film final. La cartographie de l'épaisseur finale obtenue par simulation est illustrée dans la Figure 5-6. L'épaisseur minimum du film prédite est  $33 \mu m$ , ce qui représente une diminution de 67 % de l'épaisseur initiale du film. Au niveau du centre du film (en haut du demi-œuf), l'épaisseur est de  $60 \mu m$ . Enfin, au milieu du demi-œuf, elle atteint numériquement  $45 \mu m$ . Ces valeurs prédites sont comparées par la suite avec des valeurs expérimentales.

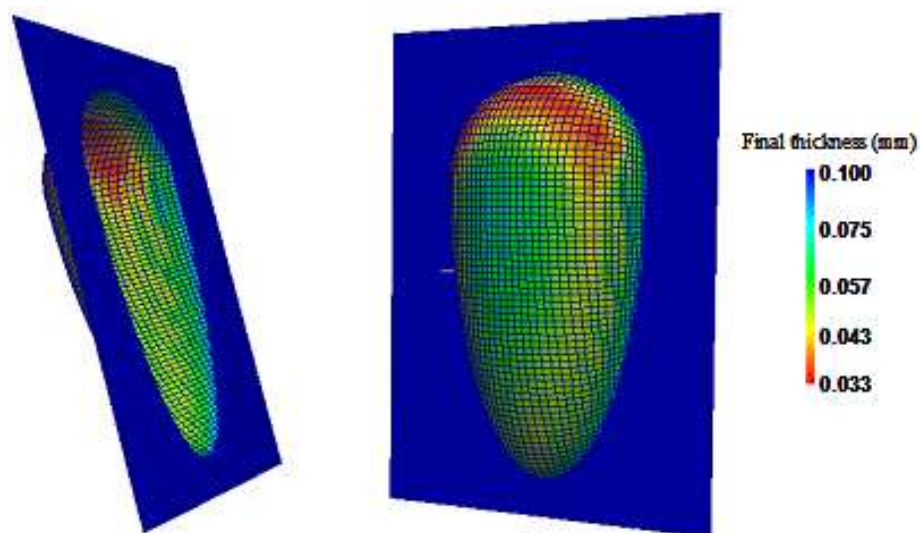


Figure 5-6 Cartographie des épaisseurs



Expérimentalement, l'épaisseur du film thermoformé est mesurée en utilisant une technique de corrélation d'images tridimensionnelle (3D). Le principe de cette technique est présenté ci-dessous :

- Corrélation d'images 3D

La corrélation tridimensionnelle est réalisée à l'aide du système stéréoscopique VIC3D. Ce système est constitué d'un système d'éclairage et deux caméras reliées à un ordinateur d'acquisition comme l'illustre la Figure 5-7.

Pour réaliser les mesures par corrélation de la préforme, un traitement est nécessaire.

Un mouchetis blanc est appliqué à l'aide d'une bombe de peinture pour réduire la brillance qui sature les capteurs (cf. Figure 5-8), et un mouchetis noir est appliqué pour offrir au logiciel de corrélation un motif suffisamment aléatoire. Le résultat de la stéréo corrélation est illustré dans la Figure 5-8. Notons que la brillance du film perturbe fortement la qualité de l'acquisition entraînant une perte partielle de données.

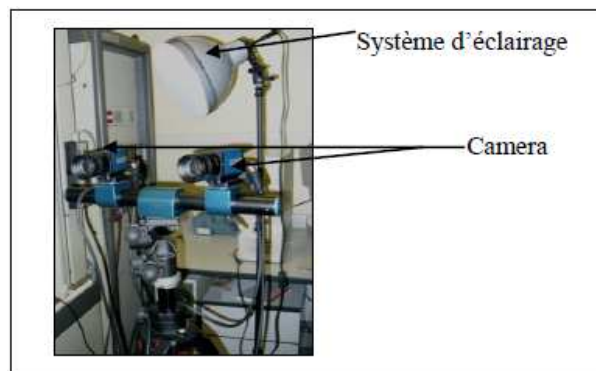


Figure 5-7 Système stéréoscopique

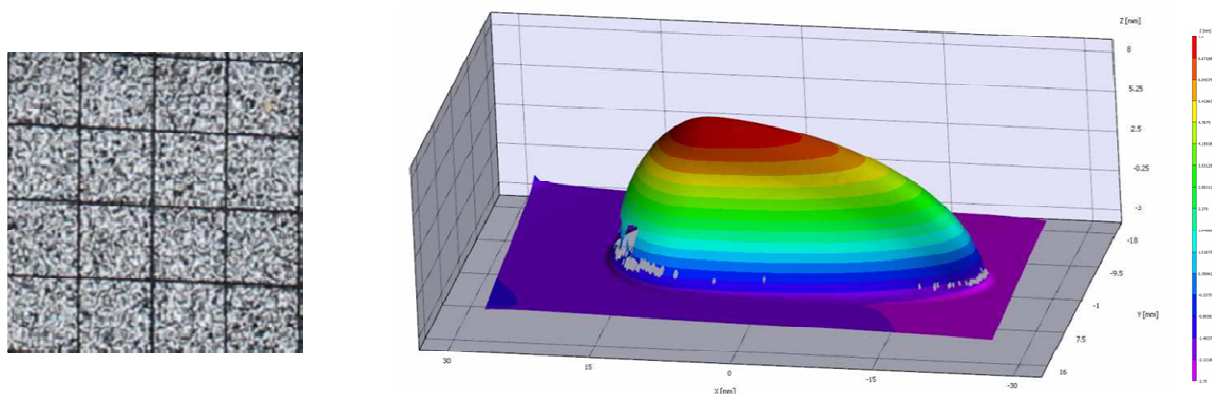


Figure 5-8 Mouchetis noir sur le demi-œuf thermoformé et résultats de stéréo-corrélation

Le film polymère est imprimé en quadrillage (1x1)  $mm^2$ . Ainsi, la détermination expérimentale de l'épaisseur est réalisée localement, c'est à dire pour chaque élément du quadrillage.

De plus, pour déterminer les valeurs expérimentales des épaisseurs, nous nous basons sur l'incompressibilité du film polymère, ainsi l'épaisseur finale  $e$  d'un élément  $P$  de la grille (cf Figure 5-9) est calculée par l'équation suivante :

$$e = \frac{dA \cdot e_0}{da} \quad (4.16)$$

Où  $e_0$ ,  $dA$  et  $da$  sont respectivement l'épaisseur initiale, l'aire initiale et l'aire finale de l'élément  $P$ .

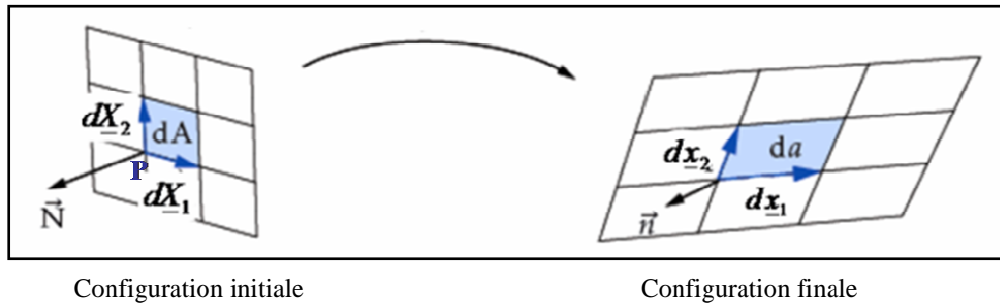


Figure 5-9 Définition de la transformation

Ainsi, les Figures 5-10 et 5-11 comparent les résultats numériques obtenus par la simulation avec ceux obtenus expérimentalement :

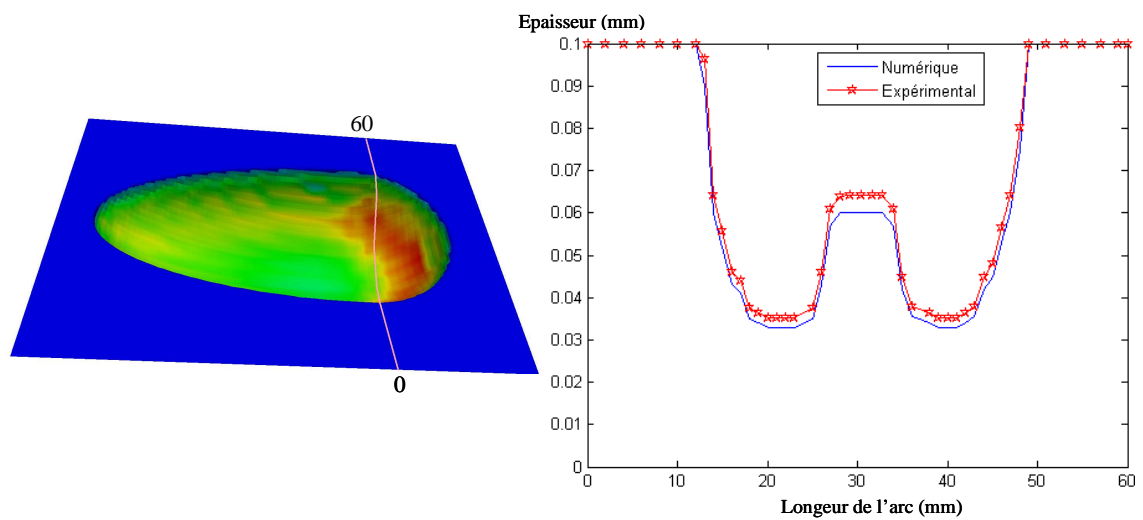


Figure 5-10 Répartition des épaisseurs suivant un arc situé sur la partie concave du demi-œuf.  
Comparaison de l'expérimentation avec la simulation

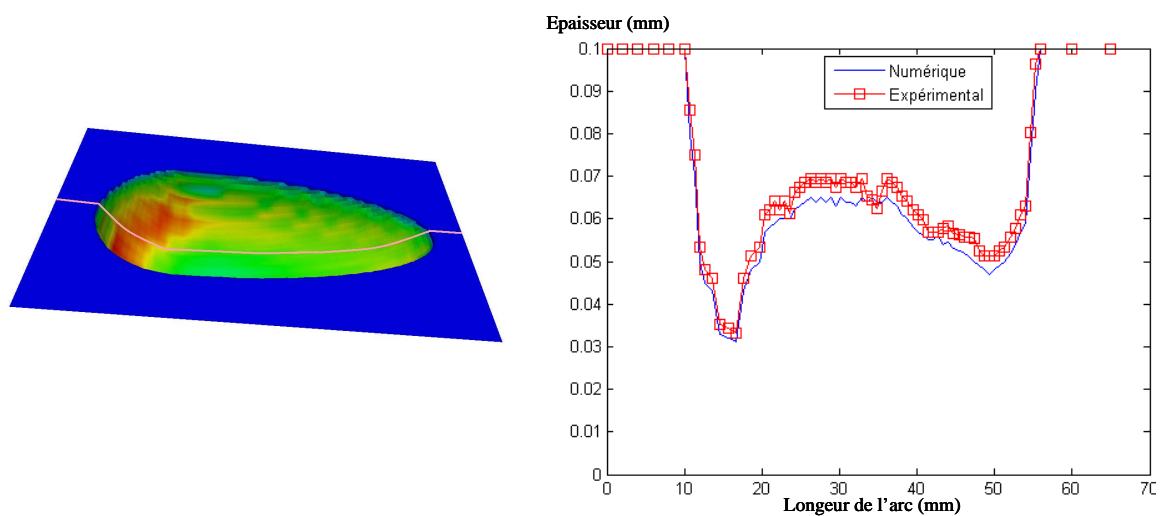


Figure 5-11 Répartition des épaisseurs suivant un arc situé sur la longueur du demi-œuf.  
Comparaison de l'expérimentation avec la simulation

Dans les deux cas, les valeurs d'épaisseurs obtenues par simulation sont en bonne concordance avec celles obtenues expérimentalement (l'écart relatif atteint 6%).

Cependant, nous pouvons remarquer une légère différence. Cet écart peut être justifié par les incertitudes de mesures expérimentales (largeur du trait de la grille, modification de l'angle d'observation,...).



## 5.2 Démonstrateur du PEP

### 5.2.1 Descriptif du prototype et dispositif

Le deuxième pilote du projet a été réalisé au PEP (Pole Européen Plasturgie). Les géométries de l'outillage et de la pièce sont illustrées dans la Figure 5-12. La particularité de cette pièce par rapport à la précédente est qu'elle est asymétrique. De plus, elle est constituée d'une forme concave dans une surface convexe, ce qui multiplie les difficultés de sa mise en forme. La Figure 5-13 donne un aperçu de la différence entre le *demi-œuf* et le *démonstrateur du PEP*, en termes de forme et de dimensions géométriques. Le pilote de thermoformage du PEP dispose de deux plateaux (céramiques chauffants), ainsi que d'un cadre pour fixer le film dans l'empreinte du moule et assurer l'étanchéité.

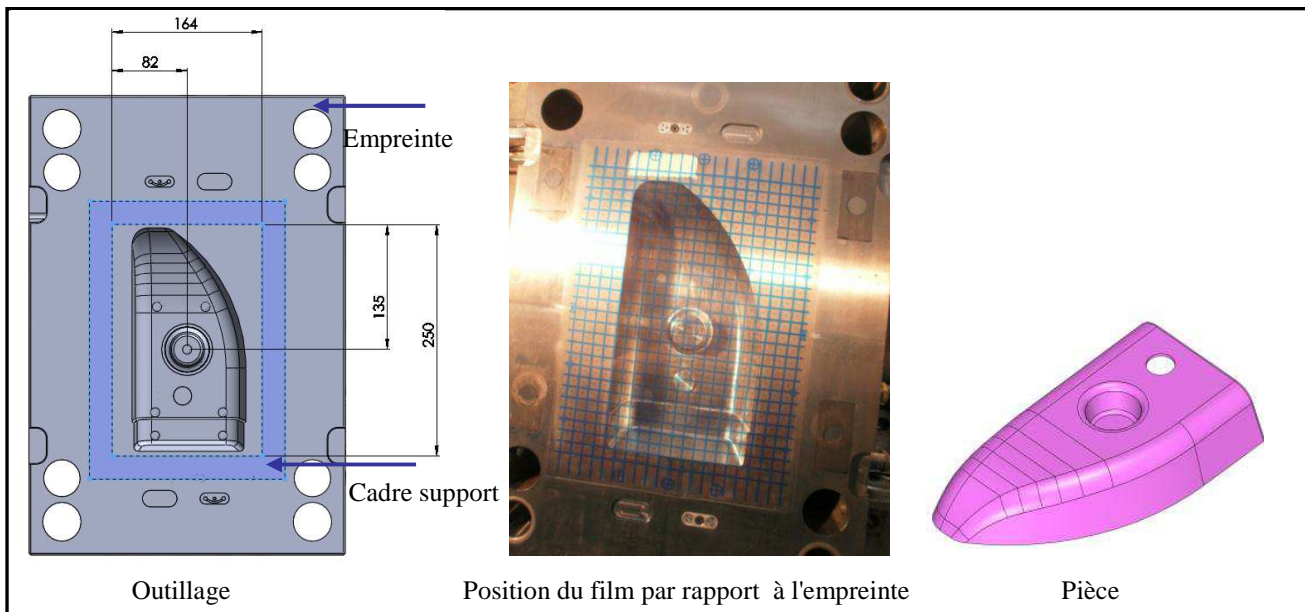


Figure 5-12 Géométrie des outils

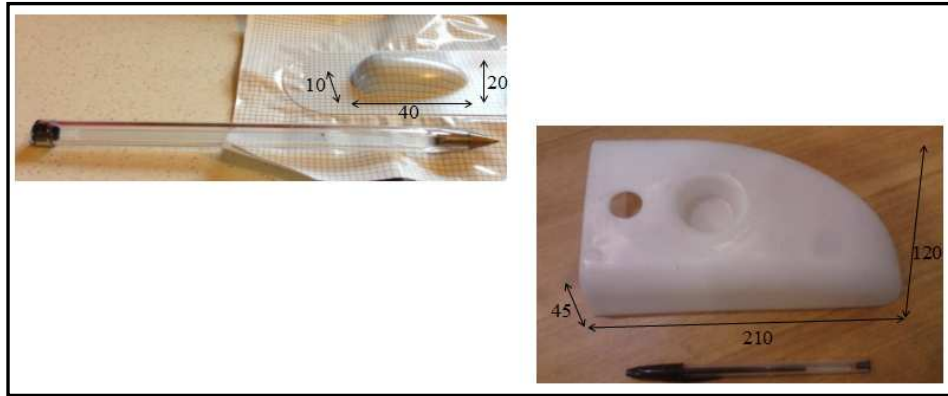


Figure 5-13 Comparaison des dimensions géométriques des deux démonstrateurs du consortium

### 5.2.2 Configuration adoptée pour la simulation

Comme dans le cadre du démonstrateur du CETIM, le maillage du moule et du film sont réalisés avec des éléments finis quadrangulaires (cf. Figure 5-14). Les mêmes caractéristiques géométriques du montage expérimental présenté sur la Figure 5-12 sont utilisées dans le modèle éléments finis. Les données du procédé appliquées sont telles que la température de l'outillage est égale à 60 °C, et la dépression d'aspiration est de 50 mbar. Un coefficient de frottement de 0.3 a été défini pour le contact entre le film et le moule. La distribution de température prédite sur le film à l'issue du chauffage infrarouge est illustrée dans la Figure 5-15. Les calculs sont effectués sur 20000 pas de temps avec un pas de temps de  $10^{-5}$  s.

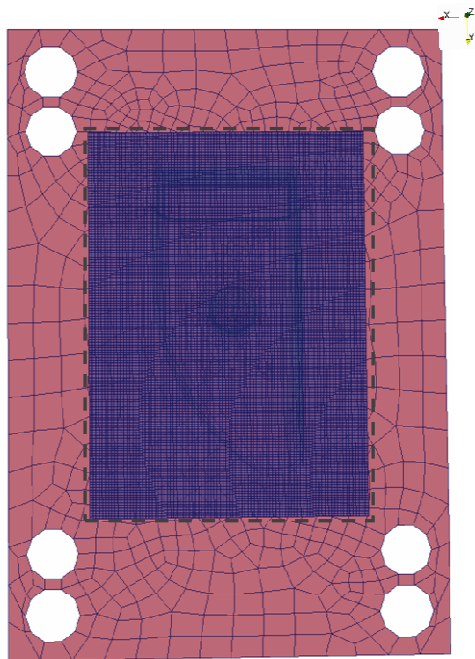


Figure 5-14 Maillage du film et du moule

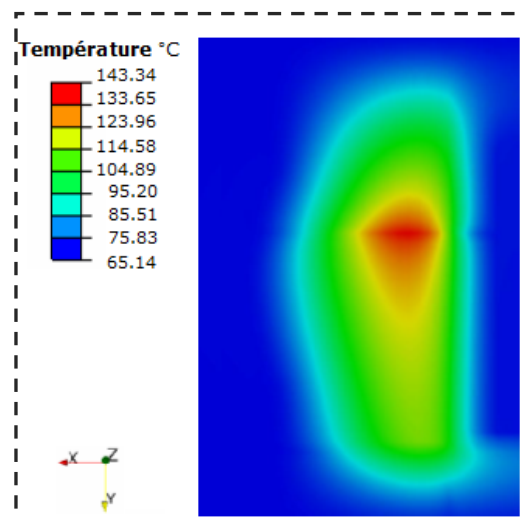


Figure 5-15 Cartographie de la température sur le film

### 5.2.3 Résultats de simulation

La Figure 5-16 présente une comparaison des déformées simulées et expérimentales. Nous pouvons d'abord constater que la forme globale du film obtenue par simulation est semblable à celle obtenue expérimentalement et il en est de même au niveau du trou de la pièce. Cependant, nous pouvons remarquer quelques différences au niveau du pourtour de la partie concave (voir Zone C, Figure 5-16). Cette différence peut s'expliquer par le fait que dans le cadre de cet essai expérimental, la distribution de température du film à l'issue du chauffage n'a pu être comparée à celle prédite par la simulation. Ainsi, une différence de dizaines de degrés suffirait pour être l'explication à cette contestation.

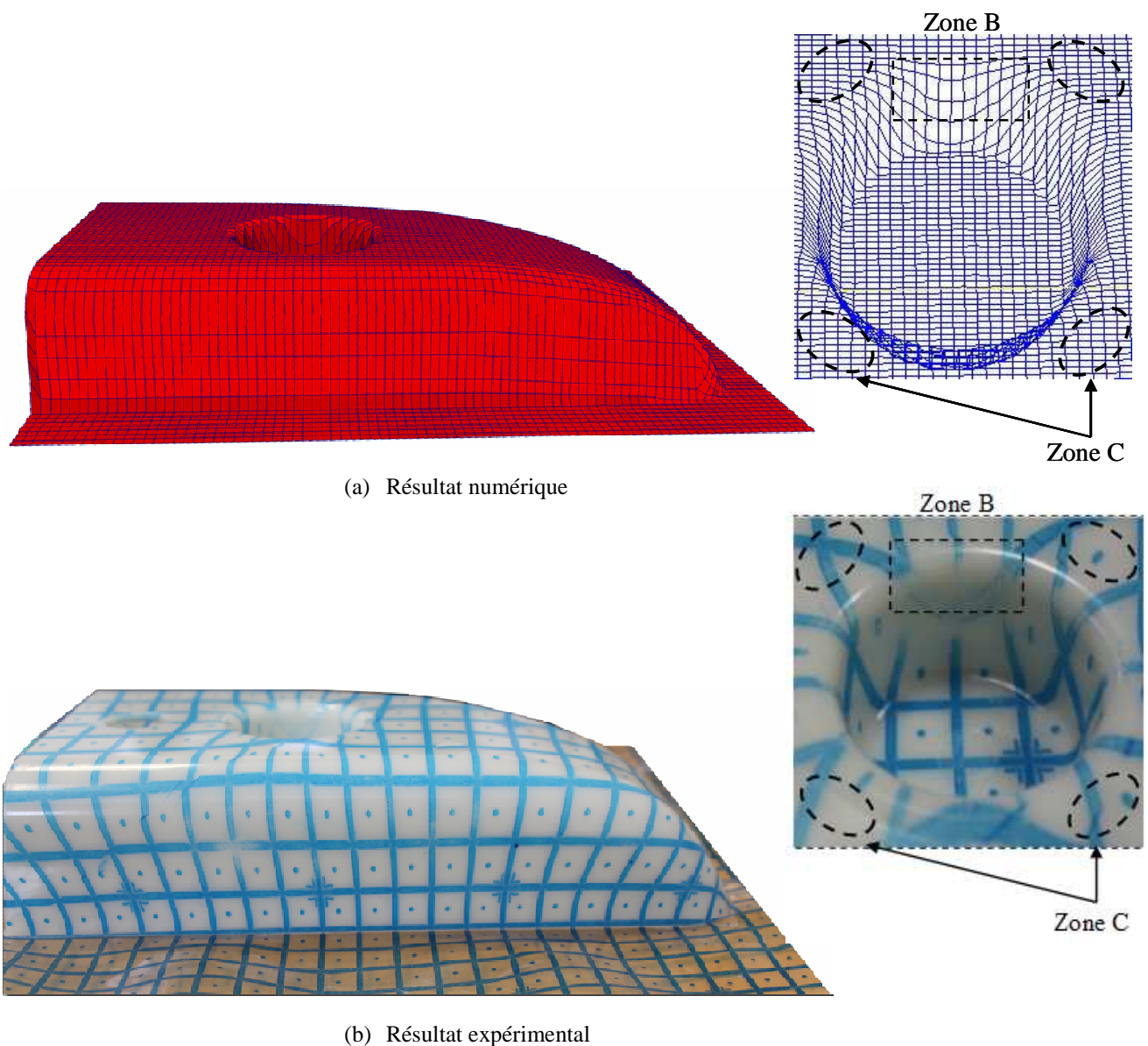


Figure 5-16 Comparaison de l'expérimentation avec la simulation

Il est important également de vérifier l'épaisseur du film prédite avec celle obtenue expérimentalement. La cartographie de l'épaisseur finale obtenue par simulation est illustrée dans la Figure 5-17. Les épaisseurs les plus fines prédites sont localisées sur la face arrière de la pièce (l'épaisseur sur les coins de cette face est égale à  $27\text{ }\mu\text{m}$ ) ainsi qu'au milieu de la partie concave de la pièce.

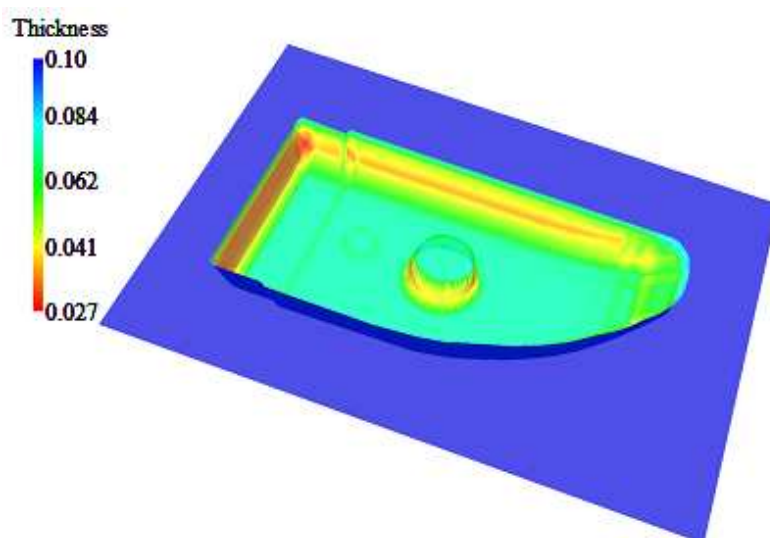


Figure 5-17 Cartographie des épaisseurs obtenues par la simulation

La Figure 5-18(b) représente une comparaison quantitative des épaisseurs simulées et expérimentales suivant une ligne (présentée en rose sur la Figure 5-18(a)).

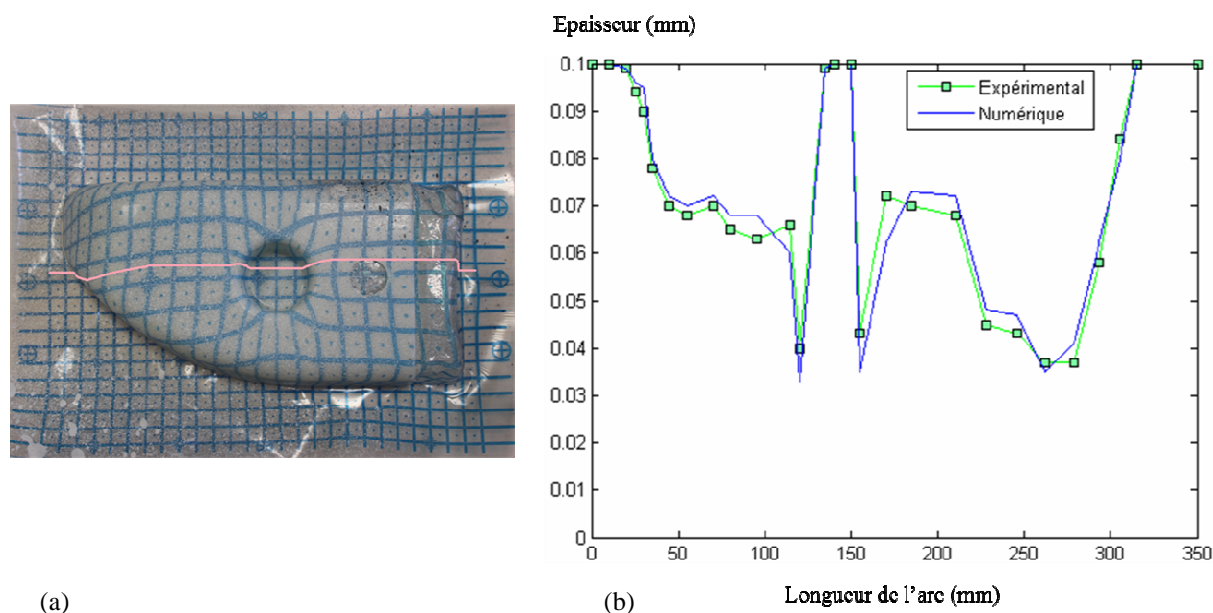


Figure 5-18 Comparaison de l'épaisseur déterminé expérimentalement et obtenue par simulation selon un arc situé positionné sur la pièce



Globalement, les épaisseurs déterminées par la simulation correspondent aux valeurs expérimentales. Cependant, on peut noter une différence. En effet, on observe que la valeur de l'épaisseur prédite par la simulation au milieu de la partie concave est surévaluée. Cette surévaluation est due à une importante distorsion des éléments situés à proximité du point de mesure. Elle n'est observée que pour deux points de mesure et ne remet donc pas en cause le modèle. Afin de compléter ces informations, nous avons mesuré l'épaisseur en différents points du film, au niveau du trou (points 1 à 7, Figure 5-19). La comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus par simulation est présentée dans la Figure 5-20.

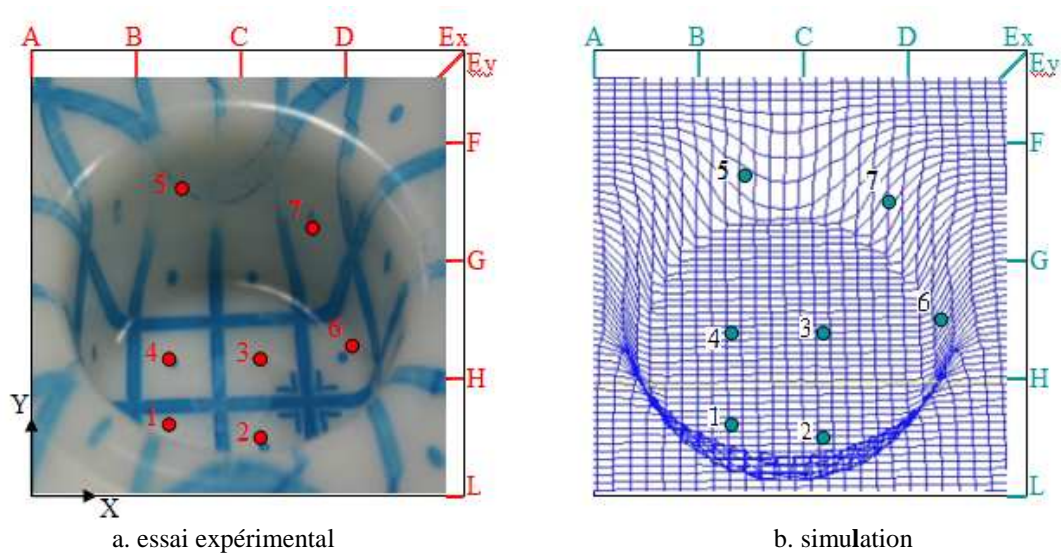


Figure 5-19 Mise en forme de la cavité du démonstrateur du PEP

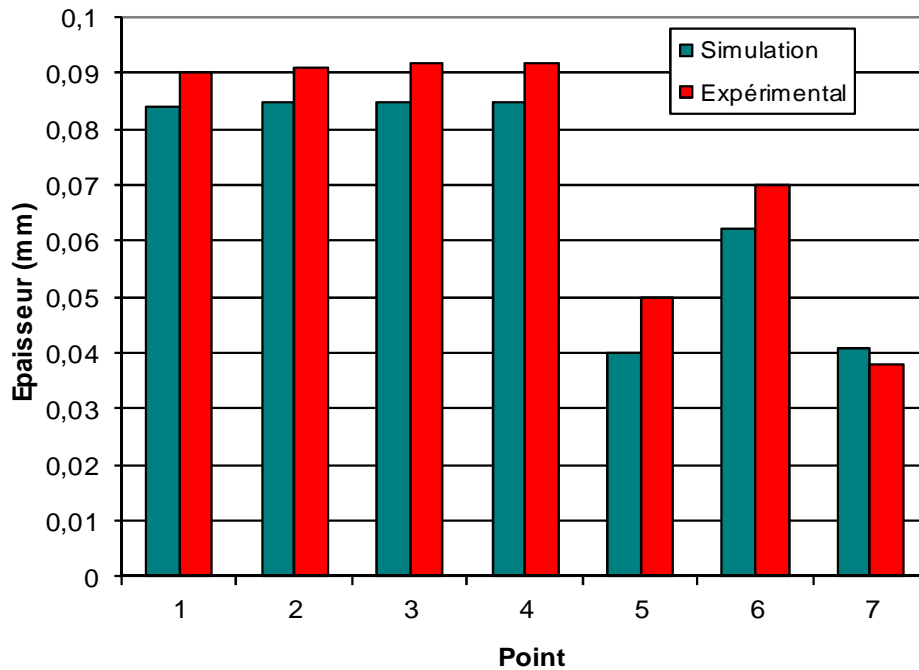


Figure 5-20 Comparaison de l'épaisseur du film formé en différents points sur la cavité du démonstrateur du PEP

Nous pouvons constater que la simulation fournit une bonne prédiction de l'épaisseur du film après formage. Si la surestimation de l'épaisseur au point 6 est due à une distorsion de l'élément au point de mesure, celle du point 5 semble avoir pour cause la raison exposée au fin du paragraphe 5.1.2, qui sont la largeur du trait du quadrillage, la courbure de l'élément de la grille, se rajoute à cela le quadrillage du film qui n'est pas suffisamment fin.

Enfin, la simulation de la mise en forme du démonstrateur du PEP avec des films minces permet de valider la modélisation présentée. On a pu montrer qu'elle permet de prédire la déformation de la préforme durant la mise en forme ainsi que l'évolution de l'épaisseur de cette dernière. Ces informations sont en bonne concordance avec les résultats expérimentaux.



# Conclusion générale

L'objectif principal de ce travail est le développement d'un modèle numérique dédié à la mise en forme des films polymères minces par le procédé de thermoformage. Ce modèle numérique doit permettre de déterminer la faisabilité, ou les conditions de cette faisabilité. L'enjeu est de résoudre les nombreuses problématiques concernant la maîtrise des propriétés finales du film de décoration, tels que sa distribution d'épaisseur. Ces objectifs sont donc en adéquation avec les exigences industrielles de plus en plus fortes vis-à-vis de la qualité des pièces thermoformées et de la rentabilité du procédé.

Pour atteindre ces objectifs, nous avons développé un modèle numérique qui comprend les deux étapes principales du procédé de thermoformage. La première étape, dite *chauffage thermique*, et la seconde étape, dite *formage*. Le modèle développé repose sur le découplage du calcul thermo-mécanique. La très courte durée de formage justifie cette hypothèse.

## ✓ Prédiction de la distribution de température dans le film

La première étape du procédé que nous avons simulé est l'étape de chauffage infrarouge du film. La prédiction avec fiabilité de cette distribution de température durant le chauffage IR est un élément fondamental pour l'obtention d'une qualité finale optimale de l'objet formé.

La modélisation adoptée repose sur le couplage des trois modes de transferts fondamentaux. Ainsi, les éléments du film polymère sont susceptibles d'échanger de la chaleur par conduction avec leurs voisins directs, par rayonnement infrarouge avec les lampes chauffantes, par rayonnement thermique avec le moule mais également par convection avec l'air ambiant et avec l'air compris entre le film et le moule.

L'apport scientifique de ce travail réside dans le développement de simulations numériques, suffisamment précises, pour être intégrées dans le modèle mécanique pour simuler la mise en forme à la température calculée.

Les simulations numériques ont été validées par comparaison avec des mesures de température réalisées par thermographie infrarouge sur un pilote du laboratoire d'essais du CETIM-CERMAT.



## ✓ Simulation de la mise en forme et prédiction de la distribution de d'épaisseur du film

Le modèle mécanique que nous avons développée pour simuler l'étape de formage du film polymère repose sur une loi de comportement isotrope, viscoélastique, basée sur le modèle de K-BKZ. Ce modèle a été étendue à un modèle non isotherme en prenant en compte la température en chaque point dans le comportement du film polymère. Cette loi de comportement prend en compte l'effet de la vitesse de déformation, ainsi que l'élasticité du polymère. Toutefois, elle ne prend pas en compte le durcissement structural du polymère, ni l'anisotropie de son comportement. Néanmoins, elle a permis d'obtenir un bon compromis entre précision et temps de calcul, tout en contribuant à la stabilité des simulations numériques du fait de sa nature visqueuse. L'implémentation de la loi de comportement dans PLAST a été réalisée par le biais d'un sous-programme développé en Fortran, puis soumise à plusieurs tests de références en vue de validation du modèle.

Les simulations numériques ont été validés expérimentalement à l'aide de mesures réalisées en utilisant une technique de corrélation d'images 3D. Un bon accord est obtenu entre la distribution d'épaisseur calculée numériquement, et la distribution d'épaisseur mesurée. L'erreur relative est inférieure à 6%.

Enfin soulignons que ces travaux constituent la contribution principale du LaMCoS dans le cadre du projet IMD3D, et ont fait l'objet de différentes publications [AHM12], [AHM13].

Quelques perspectives intéressantes s'ouvrent à l'issue du travail présenté dans ce manuscrit. En effet, bien que les procédés de décoration des pièces plastiques utilisent majoritairement des films amorphes principalement à cause de leur large plage thermique de déformation, les films semi-cristallins sont également présents sur le marché. Il serait donc intéressant de prendre en compte dans la loi de comportement les changements de la phase cristalline lors de la déformation d'un film semi-cristallin ainsi que d'introduire dans cette loi de comportement un terme de plasticité pour prendre en compte le durcissement structural.

D'autre part il serait intéressant d'optimiser la distribution de température du film. Par exemple, il serait envisageable de coupler un algorithme d'optimisation non-linéaire, avec des simulations de thermoformage réalisées avec PLAST. Ainsi, il serait possible de modifier itérativement la distribution de température du film, jusqu'à l'obtention d'un film dont l'épaisseur calculée est la plus uniforme possible.

# Bibliographie

- [ACC92] **Accary A., Eyraud C.** *Analyses thermique et calorimétrie différentielles*. Technique de l'ingénieur. 1992, 17p.
- [AGA96] **Agassant J.F., Avenas J., Sergent Ph., Vergnes B., Vincent M.** *Comportement rhéologique des polymères fondus dans La mise en forme des matières plastiques*, Tec and Doc, Lavoisier, 27-125, 1996.
- [AGA02] **Agassant J.F., Bellet M., Monasse B.** *Simulation numérique des procédés de soufflage*. Technique de l'ingénieur. AM3705, 2002, 23p.
- [AHM12] **Ahmad D., Hamila N., Lamnawar K., Boisse P.** *Mechanical analysis and simulation of the thermoforming process of thin polymer sheets*, Key Engineering Materials, Volume 504-506, 2012, p 1111-1116.
- [AHM13] **Ahmad D., Wang P., Hamila N., Boisse P.** *Numerical analysis of non-isothermal viscoelastic materials for thermoforming polymer films*, Key Engineering Materials, Volume 554-557, 2013, p 1692-1698.
- [ALL11] **Alaoui S., Boisse P., Chatel S., Hamila N., Hivet G., Soulat D., Vidal-Salle E.** *Experimental and numerical analyses of textile reinforcement forming of a tetrahedral shape*. Composites: Part A, vol. 42, pp. 612-622, 2011.
- [AND05] **Andrieu S.** *Etude expérimentale et numérique du chauffage infrarouge court sur des plaques polymères pour le thermoformage*. Thèse de doctorat ENSMP, Paris, 2005, 209p
- [BEL83] **Belytschko T.** *An overview of semidiscretisation and time integration procedures*. In: Belytschko T. and Hughes T.J.R., editor. *Computation methods for transient analysis*. Elsevier Science, pp. 1-65, 1983.
- [BER63] **Bernstein B., E.A. Kearsley, and L.J. Zapas,** *A study of stress relaxation with finite strain*. Transactions of the Society of Rheology, 1963. **7**: p. 391-410.
- [BER64] **Bernstein B., E.A. Kearsley, L.J. Zapas,** *Thermodynamics of perfect elastic fluids*. Journal of Research of the National Bureau of Standards Section B-Mathematical Sciences, 1964. **B 68**(3): p. 103-&.
- [BER65] **Bernstein B., E.A.K., L.J. Zapas,** *Elastic Stress-Strain Relations in Perfect Elastic Fluids*. Journal of Rheology, 1965. **9**(1): p. 27-39.

- [BIR87] **Bird R. Byron R.C.A., Hassager O.** *Dynamics of polymeric liquids*. Second edition ed. Vol. 1. 1987, New York: John Wiley et sons. 650.
- [BOI11] **Boisse P., Hamila N., Vidal-Sallé E., Dumont F.** *Simulation of wrinkling during textile composite reinforcement forming. Influence of tensile, in-plane shear and bending stiffnesses*. Composites Science and Technology, 2011, vol. 71, n°5, pp. 683–692.
- [BOR09a] **Bordival M., Schmidt F., Le Maout Y., Velay V.** *Otpimization of preform temperature distribution for the stretch-blow molding of PET bottles: Infrared heating and blowing modeling*. Polymer Engineering & Science, vol. 49, pp. 783-793, 2007, pp. 519-524. 2009.
- [BOR09b] **Bordival M.** *Modélisation et optimisation numérique de l'étape de chauffage infrarouge pour la fabrication de bouteilles en PET par injection-soufflage*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2009.
- [BOU06] **Boukamel A.** *Modélisations mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères*. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université d'Aix-Marseille II, 2006, 143p.
- [CAI92] **Cai W.**, *Développement et applications de modèles d'échanges radiatifs par suivi de rayons*. Thèse de Doctorat en Energétique. Ecole des Mines de Paris (1992).
- [CAR91] **Carpenter N.J., Taylor R.L., Katona M.G.** *Lagrange constraints for transient finite element surface contact*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 32, pp. 103-128, 1991.
- [CAR99] **Carrot C., Guillet J.** *Viscoélasticité linéaire des polymères fondus*. AM3620, 1999, 24p.
- [CHA07] **Champin C.** *Modélisation 3D du chauffage par rayonnement infrarouge et de l'étirage soufflage de corps creux en P.E.T.*, Thèse de doctorat, ENSMP, 2006.
- [CHA11] **Charmetant A.** *Approches hyperélastiques pour la modélisation du comportement mécanique des préformes tissées de composites*. Thèse de doctorat LaMCoS, Lyon: INSA de Lyon, 2011, 144p
- [CHO08] **Choo H.L., Martin P. J., Harkin-Jones E.M.A.** *Measurement of Heat Transfer for Thermoforming Simulations*. From the issue entitled "Proceedings of the 11th ESAFORM Conference on Material Forming, Lyon (France), 23-25 April 2008.
- [CHU82] **Chung T.J., Kim J. Y.** *Radiation View Factors by Finite Elements*, ASME J. Heat Transfer, 1982, vol. 104, pp. 792-895.

- [CIA88] **Ciarlet P.** *Mechanical Elasticity: three dimensional elasticity*, Elsevier, 1988.
- [COS08] **Cosson B., Chevalier L., Yvonnet J.** *Optimization by the c-nem method of the stretch-blow molding process of a pet bottle near tg.* 11th ESAFORM Conference on Material Forming. AIP Conference Proceedings, 18 April 2008.
- [COS11] **Cosson B., Schmidt F., Le Maout Y., Bordival M.** *Infrared heating stage simulation of semi-transparent media (PET) using ray tracing method.* International Journal of Material Forming. Vol. 4, pp. 1-10, 2011.
- [DEA90] **Dealy J.M., Wissbrun K.F.** 'Linear viscoelasticity' in melt rheology and its role in plastics processing, chap.2, van Nostrand Reinhold, New York, 43-102 (1990)
- [DEL09] **De Luycker E.** *Simulation et expérimentation en mise en forme de renforts composites 3D interlocks.* Thèse de doctorat LaMCoS, Lyon : INSA de Lyon, 2009, 148 p.
- [DEV84] **Devriendt A. B.** *La transmission de la chaleur Vol. 2 : Introduction au rayonnement thermique*, Gaëtien Morin Editeur, Québec, 1984.
- [DIO95] **Dion J. L.** *Modélisation & identification du comportement dynamique de liaison hydro-élastique*, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris, 1995.
- [DIR99] **Diraddo R.** *Modeling and experimental validation of the stretch blow molding of PET*, ANTEC'99 (NY, USA), 1999.
- [EME91] **Emery A.F., Johansson O., Lobo M., Abrous A.** *A comparative study of methods for computing the diffuse radiation viewfactors for complex structures.* Journal of Heat Transfer. 113, pp 413-421. Transactions of the ASME Journal of Heat Transfer, 1991
- [ERC05] **Erchiqui F.** *Thermodynamic Approach of Inflation Process of K-BKZ Polymer Sheet With Respect to Thermoforming*, Polymer Engineering & Science, vol.45, pp. 1319-1335, 2005.
- [ERC07] **Erchiqui F., Dituba N.G.** *Analyse comparative des méthodes de calcul des facteurs de formes pour des surfaces à contours rectilignes*, Internat. J. Thermal Sci. 46, pp. 284–293, 2007.
- [ERN04] **Erner A., Henry J.F., Billon N.** *Mechanical dissipation during plug assisted thermoforming of polystyrene as mesured by infrared thermography* In: ESAFORM'2004 Conf. Proc., Trondheim, Norway (2004).
- [FER80] **Ferry, J.D.** *Viscoelastic properties of polymers*. Third ed. 1980, New York: John Wiley and Sons. 641.

- [FUL93] **Fulchiron R., Verney V., Marin G.** *Determination of the elongational behavior of polypropylene melts from transient shear experiments using Wagner's model.* Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 1993. **48**(1-2): p. 49-61.
- [GRE57] **Green A.E., Rivlin R.S.** *The mechanics of non-linear materials with memory.* Arch. Rational Mech. Anal, 1, 1–21 (1957).
- [HAD88] **Haddad Y.M.** *On the theory of the viscoelastic solid.* Res Mechanica, 25:225259, 1988.
- [HAM07] **Hamila N.** *Simulation de la mise en forme des renforts composites mono et multi plis.* Thèse de doctorat LaMCoS, Lyon : INSA de Lyon, 2007, 136 p.
- [HAM07b] **Hamila N., Boisse P.** *A meso–macro three node finite element for draping of textile composite preforms.* Applied Composite Materials, 2007, vol. 14, n°4, pp. 235–250.
- [HAM09] **Hamila N., Boisse P., Sabourin F., Brunet M.** *A semi-discrete shell finite element for textile composite reinforcement forming simulation.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, vol. 79, pp. 1443–1466.
- [HUA05] **Huang H.-X., Deng Y.-H., Huang Y.-F.** *Temperature profiles within reheated preform in stretch blow molding.* ANTEC'05 (Boston, Massachusetts), 2005.
- [HUG87] **Hughes J. R.** *The finite element method: Linear static and Dynamic finite element analysis.* PRENTICE-HALL, New Jersey, 1987.
- [ITS00] **Itskov M.** *On the theory of fourth-order tensors and their applications in computational mechanics.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, vol. 189, n°2, pp. 419–438.
- [JAM98] **Jammet, J.C.** (1998) *Thermoformage.* Technique de l'ingénieur **AM3660**.
- [KAU99] **Kausch H.H., Heymans N., Plummer C.J., Decroly P.** *Traité des matériaux, volume 14, Matériaux polymères: Propriétés mécaniques et physique,* Polytechniques et universitaires romandes, 658p. 1999.
- [KRE09] **Krenk S.** *Non-linear Modeling and Analysis of Solids and Structures.* Cambridge University Press, 2009, 360 p., ISBN: 978-0511601514.
- [LAR01] **Laroche D., Diraddo R.** *Thermomechanical modeling, microstructure development and part performance in stretch blow molding,* ANTEC, 2001.

- [LEE01] **Lee J.K., Scott C.E., Virkler T.L.** *Effects of rheological properties and processing parameters on ABS thermoforming*, Polymer Engineering & Science Volume 41, p 240-261, 2001
- [LOD64] **Lodge A.S.** *Elastics Liquids*. 1964: Academic Press.
- [MAC94] **Macosko C. W.** *Measurements: rheometry in : Rheology principles, measurments and applications*. Wiley-VCH, USA, 1994, pp. 175-179
- [MAC94a] **Macosko C. W.** *Shear rheometry, drag flows in : Rheology principles, measurments and applications*. Wiley-VCH, USA, 1994, pp. 181-236
- [MAR99] **Martin L. Stracovsky D., Laroche D., Berdatti A., Ben-Yedder R., Diraddo R.** *Modeling and experimental validation of the stretch blow molding of P.E.T.* Polymer Proceeding Society 15. New-York, USA (1999)
- [MEO00] **Meo S.** *Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère: de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille II, 2000.
- [MER06] **Mercier D.** *Finite element simulation of thick sheet thermoforming*, Ph.D. Thesis, Lehigh University, 2006.
- [MIR07] **Mir H., Benrabah Z., Thibault F.** *The Use of Elasto-Visco-Plastic Material Model Coupled with Pressure-Volume Thermodynamic Relationship to Simulate the Stretch Blow Molding of Polyethylene Terephthalate*, AIP Conference Proceedings 908 (2007), p. 331-336.
- [MOE11] **Moës N.** *Cours sur la mécanique des milieux continus et discrets*. Ecole centrale de Nantes, 2011, version 1, 125p.
- [MON01] **Monteix S.** *Modélisation du chauffage convecto-radiatif de préformes en P.E.T. pour la réalisation de corps creux*. Thèse de doctorat en Science et Génie des Matériaux, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
- [NEW59] **Newmark N.M.** *A method of computation for structural dynamics*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1959, vol. 85, n°3, 67–94.
- [OGD84] **Ogden R.W.** *Non-Linear Elastic Deformations*, Paris: John Wiley, 1984, 544 p.
- [OZI85] **Ozisik N. M.** *Heat Transfer: a basic approach..* Mc Graw Hill (1985).
- [OZI93] **Ozisik N. M.** *Heat Conduction*, 2nd edition, John Wiley & Sons, N.Y., 1993.
- [PAJ01] **Pajani D.** *Thermographie, Principe et Mesure*, Techniques de l'ingénieur, 2001, RAB, R2740.

- [PAP83] **Papanastasiou A.C., Scriven L.E., Macosko C.W.** *An integral constitutive equation for mixed flows: Viscoelastic characterization.* J. Rheol. 27, 387 (1983)
- [RAM96] **Rammohan R.** *Efficient evaluation of diffuse view factors for radiation,* Int. J. Heat Mass Transfer 39 (1996) 1281–1286.
- [RAU02] **Rault J.** *Les polymères solides. Amorphes, élastomères, semi-cristallins. Propriétés microscopiques et macroscopiques.* Toulouse, Cépaduès-Editions, 2002, 254p.
- [RIV48] **Rivlin R.S.** *Large elastic deformations of isotropic materials,* Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1948, vol. 241, pp. 379–397.
- [SAA03] **Saad P.** *Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc.* Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon (2003).
- [SAN06] **Sandré P.** *Surmoulage ou surinjection.* Technique de l'ingénieur. AM3699, 2006, 14p.
- [SCH95] **Schmidt F.** *Etude expérimentale et modélisation du procédé d'injection/soufflage biorientation en cycle froid de bouteilles en P.E.T.,* Thèse de Doctorat, ENSMP, 1995.
- [SCH98] **Schmidt F. Agassant, J. F., Bellet M.** *Experimental study and numerical simulation of the injection stretch/blow molding process,* Polymer Engineering and Science 38, 1998, pp. 1399-1412
- [SID74] **Sidoroff F.** *Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire.* J. Méc., 1974, pp. 679-713
- [SID75] **Sidoroff F.** *Variables internes en viscoélasticité, 1. Variable internes scalaires et tensorielles.* J. Méc., 1975, pp. 545–566
- [SID82] **Sidoroff F.** *Cours sur les grandes déformations.* Ecole d'été Sophia-Antipolis ; 8-10 septembre 1982 ; Rapport GRECO n°51/1982.
- [SIM87a] **Simo J.C.** *On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: fomulation and computational aspects.* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **60**, 153–163 (1987).
- [SIM87b] **Simo, J.C., Hughes T.J.R.** *General Return Mapping Algorithms for Rate Independent Plasticity,* in Constitutive Laws for Engineering Materials, (ed., C.S. Desai), Elsevier, N.Y., 1987.

- [SUT94] **Sutter V. W., Mattice W. L.** *Conformational Theory of Large Molecules*, Wiley, New York, 1994.
- [TAI98] **Taine J., Petit J. P.** *Mécanique des fluides anisothermes*. Transferts thermiques. Dunod (1998).
- [TCH04a] **Tcharkhtchi A., Perrot E., Chinesta F.** *Simulation of thermal phenomena on the interface molten polymer/powder polymer during rotational molding*. International polymer processing. 2004, pp. 296-302
- [TCH04b] **Tcharkhtchi A., Khelladi S., Rey R.** *Flow of liquid reactive polymers during rotational molding*. Rotation. Volume 13, 2004.
- [TEY96] **Teyssèdre G., Lacabanne C.** *Caractérisation des polymères par analyse thermique*. Technique de l'ingénieur. 1996, 12p.
- [THE12] **Thevenon A.** *Relations structure/propriétés thermomécaniques élongationnelles de films polymères thermoplastique*. Thèse de doctorat, Université de Claude Bernard Lyon 2, 2012, 236p.
- [VER97] **Verron E.** *Contribution expérimentale et numérique aux procédés de moulage par soufflage et de thermoformage*. Thèse de Doctorat. Ecole Centrale de Nantes (1997).
- [WAG09] **Wagner M.H., Rolon-Garrido V.H.** *The damping function in rheology*. Rheologica Acta, 2009. **48**(3): p. 245-284.
- [WAN00] **Wang S., Makinouchi A., Nakagawa T.**, "3D viscoplastic FEM simulation of a stretch blow molding process", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **48** (2000) p. 501-521.
- [WHI67] **White J.L., N. Tokita**, *An additive functional theory of viscoelastic deformation with application to amorphous polymers solutions and vulcanizates*. Journal of the Physical Society of Japan, 1967. **22**(3): p. 719-&.
- [ZIE89] **Zienkiewicz, O.C., Taylor R.L.** *The Finite Element Method*, 4th ed., McGraw-Hill, London, Vol. I., 1989
- [ZIE00] **Zienkiewicz, O.C., Taylor R.L.** *The Finite Element Method*, volume 1: The basis. Edition 5, Swansea: Butterworth Heinmann, 689 p., 2000.
- [ZIN10] **Zinet M.** *Modélisation de la cristallisation des polymères dans les procédés de plasturgie : quantification des effets thermiques et rhéologiques*. Thèse de doctorat CETHIL, Lyon : INSA de Lyon, 201 p. 2010.



## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE LYON

NOM : AHMAD

DATE de SOUTENANCE : 20/11/2013

Prénoms : Daniel

TITRE :

Analyse et simulation de la déformation de films polymères de décoration au cours de leur mise en forme

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre :

Ecole doctorale :

Mécanique, énergétique, Génie civil, Acoustique

Spécialité :

Mécanique, Génie mécanique, Génie civil

RESUME :

La simulation de la mise en forme des films polymères de décoration par le procédé de thermoformage à plusieurs objectifs. Elle permet de déterminer la faisabilité, ou les conditions de cette faisabilité et surtout elle permet de résoudre les nombreuses problématiques concernant la maîtrise des propriétés finales du film de décoration, tels que sa distribution d'épaisseur. Les simulations évitent les coûteuses études expérimentales par essais-erreurs. Le travail présenté dans ce document concerne les deux étapes principales de la mise en forme des films polymères par thermoformage, à savoir, l'étape de chauffage thermique par infrarouge ainsi que la seconde étape dite de formage.

Les apports de cet travail sont les suivants : le développement d'une loi de comportement viscoélastique isotrope non isotherme, permettant de décrire le comportement mécanique du film polymère au cours de sa déformation, la simulation de l'étape de chauffage infrarouge et la prise en compte de cette étape dans la loi de comportement mécanique proposée, permettant la mise en forme des films polymères à la température calculée. Enfin, un ensemble de simulations de mise en forme ont été réalisés et validés par comparaison avec des essais expérimentaux.

MOTS-CLES :

Films polymères, mise en forme, procédé de thermoformage, chauffage infrarouge, grandes transformations, méthode par éléments finis

Laboratoire (s) de recherche :

Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures (LaMCoS)

CNRS UMR 5259

Directeur de thèse:

BOISSE Philippe

Composition du jury :

BOISSE Philippe, DELL'ISOLA Francesco, GENTHON Eric, HAMILA Nahiène, MAAZOUZ Abderrahim, SCHMIDT Fabrice, TCHARKHTCHI Abbas

